第11卷 第2期
1991年5月
数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol.11 No.2
May, 1991

Banach流形上的重合指数*

张石生 陈玉清
(四川大学数学系，成都)

由Lefschetz[1]所开创的重合问题的研究，后来被Eilenberg，Montgomery，Górniewicz，Granas，Kucharski和Skordev等人的工作[2—7]所继承和发展，并使得这一问题的理论和应用的研究变得十分活跃，而Lefschetz的重合定理被Mukherjea[9]推广到一类光滑流形上．在[9]中定义了映象对的Lefschetz重合指数．

本文的目的是研究Banach流形上的重合问题．我们考虑了这样的一类流形(其可作为绝对邻域收缩而嵌入Banach空间)上的重合问题．利用[5]中的结果，我们定义了映象对的重合指数．借助于我们所定义的指数，我们进一步讨论了Banach流形上重合问题的可解性．

为下面叙述方便，我们先引进一些定义和符号．

设X, Y为二拓扑空间，$p, q: X\to Y$为两个映象．我们称(p, q)的重合问题是求$x\in X$，使得$p(x)=q(x)$．以下我们记

$$F_{ix}(p, q):=\{y\in Y: y\in qp^{-1}(y)\};\ K(p, q):=\{x\in X: p(x)=q(x)\}.$$

显然 $F_{ix}(p, q)\neq\phi\Leftrightarrow K(p, q)\neq\phi$．

主要结果

以下我们处处假设E是一Banach空间，M为一拓扑完备的Banach流形且M可作为一绝对邻域收缩嵌入E中．设Γ为一完备的度量空间．设U为M在E中之一开邻域，设$r: \overline{U}\to M$为一收缩映象． 设 $p: \Gamma\to M$是连续的满映象，而且是Vietoris 的，以后记为$p: \Gamma\Rightarrow M$．我们称$p: \Gamma\to M$是Vietoris的，如果N是M中的紧集，则$p^{-1}(N)$为Γ中的紧集，且对每一$y\in M$，$p^{-1}(y)$是零调的，即以有理数为系数的具紧支撑的Čech同调群$Hn(p^{-1}(y))=0$，$\forall n\geq 1$，而$Ho(p^{-1}(y))=Q$(有理数群)．设$q: \Gamma\to M$．现在考虑p, q的重合问题．我们记

$$\Gamma_1=\{(x, y)\in\overline{U}\times\Gamma:\ r(x)=p(y)\},\tag{1}$$

$$f(x, y)=r(x),\ \forall(x, y)\in\Gamma_1;\ g(x, y)=y,\ \forall(x, y)\in\Gamma_1,\tag{2}$$

$$p_r(x, y)=x,\ \ q_r(x, y)=i\circ q\circ g(x, y),\ \ \forall(x, y)\in\Gamma_1,\tag{3}$$

其中i是$M\to E$的包含映象，于是易于证明

$$F_{ix}(p, q)=F_{ix}(p_r, q_r).$$

上述各映象间有下面的交换图

* 1989年7月17日收到．

由 r 与 p 的连续性知 Γ_1 为完备度量空间，其上的度量为

$$\begin{tikzcd} \overline{U} \arrow[r, "r"] & M & \Gamma \arrow[l, Rightarrow, "p"'] \arrow[r, "q"] & M \arrow[d, "i"] \\ & \Gamma_1 \arrow[ul, Rightarrow, "p_r"] \arrow[u, "f"] \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, "q_r"'] & & E \end{tikzcd}$$

图 1

$$\rho((x_1,y_1),(x_2,y_2))=\|x_1-x_2\|+d(y_1,y_2),$$

其中 $\|\cdot\|$ 为 E 上的范数，$d(\cdot,\cdot)$ 为 Γ 上的度量，易知 p_r: $\Gamma_1\to\overline{U}$ 连续，$p_r(\Gamma_1)=\overline{U}$ 且有 $p_r^{-1}(x)=\{x\}\times p^{-1}(r(x))$ 为零调的．若 C 为 $\overline{U}$ 中的紧集，则

$$p_r^{-1}(C)=\bigcup_{x\in C}\{(x,y): r(x)=p(y)\}.$$

故其为 Γ_1 中的紧集，因而 p_r 是 $\Gamma_1\Rightarrow\overline{U}$ 的 Vietoris 映象．

现在再设 $q: \Gamma\to M$ 连续，且 $q(\Gamma)$ 为紧集．易知 $q_r(\Gamma_1)=i\circ q(\Gamma)$ 为紧集且 q_r: $\Gamma_1\to E$ 连续，因而 $F_{ix}(p_r,q_r)$ 为 U 中之一紧集(因 $F_{ix}(p,q)\subset M\subset U$)．

设 V 是这样的有界开集：$F_{ix}(p_r,q_r)\subset V\subset U$．现考察映象：

$$\overline{V}\overset{\hat{p}_r}{\Longleftarrow} p_r^{-1}(\overline{V})\xrightarrow{\hat{q}_r}E,$$

其中 $\hat{p}_r(x,y)=p_r(x,y)$，$\hat{q}_r(x,y)=q_r(x,y)$，$\forall(x,y)\in p_r^{-1}(\overline{V})$．于是 $(\hat{p}_r,\hat{q}_r)$ 为一紧对．由[5]，因而其重合指数 $I(\hat{p}_r,\hat{q}_r)$ 有意义．现在我们定义 (p,q) 的重合指数：

$$I(p,q)=\sup\{|I(\hat{p}_r,\hat{q}_r)|: r\text{为}M\text{的任一收缩映象}\}.$$

($I(p,q)$ 可能为 $+\infty$)．我们有下面的结果

定理 1 (i) 若 $I(p,q)\neq 0$，则 $K(p,q)\neq\phi$；

(ii) 若 V 为 M 中的开子集，$F_{ix}(p,q)\subset\overline{V}$，$qp^{-1}(\overline{V})\subset\overline{V}$，则 $I(p,q)\leq I(p',q')$，其中 $\overline{V}\overset{p'}{\Longleftarrow}p^{-1}(\overline{V})\xrightarrow{q'}\overline{V}$，$p'(y)=p(y)$，$q'(y)=q(y)$，$\forall y\in p^{-1}(\overline{V})$．

(iii) 若 $y_0\in M$，$g(x)=y_0$，$\forall x\in\Gamma$，则 $I(p,q)=1$．

(iv) 设 h: $\Gamma\times[0,1]\to M$ 连续，$h(\Gamma\times[0,1])$ 紧．则 $I(p,h_0)=I(p,h_1)$，其中 $h_0=h(\cdot,0)$，$h_1=h(\cdot,1)$．

证明 (i) 因 $I(p,q)\neq 0$，故有某一收缩映象 $r: \overline{U}\to M$，使得 $I(\hat{p}_r,\hat{q}_r)\neq 0$，因而 $F_{ix}(\hat{p}_r,\hat{q}_r)\neq\phi$．由于 $F_{ix}(p,q)=F_{ix}(\hat{p}_r,\hat{q}_r)$，故 $F_{ix}(p,q)\neq\phi$．从而 $K(p,q)\neq\phi$．

(ii) 因 V 为 M 的开子集，故 $r^{-1}(V)$ 为 U 中的开子集，r 为 $\overline{U}$ 到 M 的收缩映象．考虑下图：

$$\begin{tikzcd} \overline{r^{-1}(V)} \arrow[r, "r'"] & \overline{V} & p^{-1}(\overline{V}) \arrow[l, Rightarrow, "p'"'] \arrow[r, "q'"] & \overline{V} \arrow[d, "i'"] \\ & \Gamma_1' \arrow[ul, Rightarrow, "p_r'"] \arrow[u, "f'"] \arrow[ur, "g'"] \arrow[rr, "q_{r'}"'] & & E \end{tikzcd}$$

图 2

其中 r' 表示 r 在 $\overline{r^{-1}(V)}$ 上的限制，i': $\overline{V}\to E$ 为包含映象，

$$\Gamma_1'=\{(x,y)\in\overline{r^{-1}(V)}\times p^{-1}(\overline{V}),\ r'(x)=p'(y)\}.$$

$$p_{r'}(x,y)=x,\quad f'(x,y)=r'(x),\quad g'(x,y)=y,\quad \forall(x,y)\in\Gamma_1',$$

$$q_{r'}(x,y)=i'\circ q'\circ g'(x,y),\quad\forall(x,y)\in\Gamma_1'.$$

直接计算可知 $p_r|_{\Gamma_1'}=p_{r'}$，$q_r|_{\Gamma_1'}=q_{r'}$ 故由[5]中重合指数的切除性质知 $I(\hat{p}_r,\hat{q}_r)=$

$I(\hat{p}_{r'}, \hat{q}_{r'})$. 故

$$\sup\{|I(\hat{p}_r, \hat{q}_r)|: r\text{为}M\text{的任一收缩映象}\}$$
$$\leq \sup\{|I(\hat{p}_{r'}, \hat{q}_{r'})|: r'\text{为}\overline{V}\text{的任一收缩现象}\}.$$

即 $I(p,q) \leq I(p',q')$.

(iii) 注意到对M的任一收缩映象r，均有$q_r(x,y)=y_0$，故$I(\hat{p}_r,\hat{q}_r)=1$. 从而$I(p,q)=1$.

(iv) 对M的任一收缩映象r，易知$h_r: \Gamma_1\times[0,1]\to E$连续，其中$\Gamma_1$与(1)中的相同，而$h_r$与(3)中的$p_r$有相同的意义. 由[5]中重合指数的同伦性质有

$$I(\hat{p}_r, \hat{h}_r(\cdot,0)) = I(\hat{p}_r, \hat{h}_r(\cdot,1)).$$

故$I(p,h_0)=I(p,h_1)$. ■

下面我们引入另一种映象对.

设$M \overset{p}{\Leftarrow} \Gamma \overset{q}{\rightarrow} M$. 称$(p,q)$为局部紧对，如果对任一$x\in M$，存在$x$在$M$中的开邻域$O_x$，使得$qp^{-1}(O_x)$为$M$中的相对紧集；称$(p,q)$为迭代紧对，如果存在$n$，使得$(qp^{-1})^n(M)$为紧集.

现在我们假设(p,q)为一局部紧的迭代紧对. 设$p: \Gamma\Rightarrow M$，即p为连续满射的Vietoris映象. 设$q: \Gamma\to M$连续，再次注意图1，直接计算得$(q_r p_r^{-1})^n(\overline{U}) = i(qp^{-1})^n(M)$. 任给$x\in\overline{U}$，则$r(x)\in M$，故有$r(x)$在$M$中的开邻域$O_{r(x)}$，使得$qp^{-1}(O_{r(x)})$为相对紧集，$r^{-1}(O_{r(x)})$为$x$在$\overline{U}$中的开邻域，而且有

$$q_r p_r^{-1}(r^{-1}(O_{r(x)})) = i\cdot qp^{-1}(O_{r(x)}).$$

故(p_r,q_r)为局部紧的迭代紧对，又因

$$F_{ix}(p_r,q_r) \subset (q_r p_r^{-1})^n(\overline{U}) \subset M \subset U$$

故存在U中的有限多个开集O_k，$1\leq k\leq N$，使得

$$\Omega = \bigcup_{k=1}^{N} O_k \supset (q_r p_r^{-1})^n(\overline{U})$$

且$q_r p_r^{-1}(\overline{O}_k)$为紧集，$k=1,\cdots,N$. 故$q_r p_r^{-1}(\overline{\Omega})$为紧集.

考察$\overline{\Omega} \overset{p_r'}{\Longleftarrow} p_r^{-1}(\overline{\Omega}) \xrightarrow{q_r'} E$，其中$p_r'$，$q_r'$分别表$p_r$，$q_r$在$p_r^{-1}(\overline{\Omega})$上的限制. 此时$(p_r',q_r')$为一紧对，故$I(p_r',q_r')$有意义. 现定义

$$I(p,q) = \sup\{|I(p_r',q_r')|: r\text{为}M\text{的任一收缩映象}\}.$$

易于验证定理1的结论对局部紧的迭代紧对仍成立，只不过结论(iv)在叙述上稍有变化：设$h: \Gamma\times[0,1]\to M$连续，且

$$\overbrace{h\{p^{-1}[h(p^{-1}(h\cdots\cdots p^{-1}(h(p^{-1}(M)\times[0,1])\times[0,1]\cdots]\times[0,1]\}}^{n\text{ 次复合}}$$

为紧集. 则$I(p,h_0)=I(p,h_1)$.

注 上述重合指数还可推广到一类称之为K集压缩对的情形：设M为一Finsler流形，利用其上的Finsler度量，可建立与之相应的Kuratowski非紧性测度$a(\cdot)$. 相应于这一非紧性测度，称满足$M \overset{p}{\Leftarrow} \Gamma \overset{q}{\rightarrow} M$的映象对$(p,q)$为$K$-集压缩对. 假若对$M$中任一有界集$N$(对$M$上的Finsler度量而言)，$a(N)\neq 0$，则$a(qp^{-1}(N)) < ka(N)$. 如果$M$有界，$0<k<1$，$(p,$

q）局部紧且为k-集压缩的．仿照前面的讨论，可定义（p, q）的重合指数．

作为定理 1 的推论有下面的结果．

推论 1　设M可缩，则$K(p,q)\neq\phi$，即qp^{-1}在M中有不动点．

证明　设$\varphi(y,t)$: $M\times[0,1]\to M$为收缩映象，$\varphi(y,0)=y$，$\forall y\in M$；$\varphi(y,1)=y_0\in M$．易知$\varphi(q(x),t)$: $\Gamma\times[0,1]\to M$连续，且$\varphi(q(\Gamma)\times[0,1])$为紧集，故$I(p,q)=I(p,\varphi(q(\cdot),0))=I(p,\varphi(q(\cdot),1))=I(p,y_0)=1$．故$K(p,q)\neq\phi$．■

由推论 1 立即可得下面的

推论 2　设φ: $M\to 2^M$为一容许的多值映象(即存在紧对（p, q），使得$qp^{-1}(x)\subset\varphi(x)$，$\forall x\in M$)，$M$可缩．则$\varphi$在$M$中有不动点．

注　当$p=I$时，由推论 1 即得[10]中的定理 8．

参 考 文 献

[1] S. Lefschetz, Algebraic Topology, New York, 1942.

[2] S. Eilenberg and D. Montgomery, Fixed point theorems for multivalued transformations, Amer. J. Math., 58(1946), 214—222.

[3] L. Górniewicz, Homological methods in fixed point theory of multivalued maps, Dissertation Math., 129(1976), 1—71.

[4] L. Górniewicz & G. Skordev, On coincidence of continuous mappings, Fund. Math., 101(1978), 171—180.

[5] Z. Kucharski, A coincidence index, Bull. Acad. Polon Sci., 24(1976), 245—252.

[6] L. Górniewicz & A. Granas, Some general theorems in coincidence theory I, J. Math. Pures Appl., 60(1981), 361—373.

[7] L. Górniewicz & Z. Kucharski, Coincidence of k-set contraction pairs, J. Math Anal Appl., 107(1985), 1—15.

[8] F. E. Browder, Fixed point theorem of infinite dimensional manifolds, Trans. Amer. Math. Soc., 119(1965), 179—194.

[9] K. K. Mukherjea, Coincidence theory for infinite dimensional manifolds, Bull. Amer. Soc., 1968, 493—496.

[10] Ju. G. Borisovic & Ju. E. Gliklin, Fixed points of mappings of Banach Manifolds and some applications, Nonlinear Anal., V. 4, No.1(1980), 165—192.

[11] Shih-sen Chang & Jian-wei Song, Coincidence index for setvalued compact mapping pairs, J. Math. Anal. Appl., V. 148, No.2(1990), 469—488.

On the Coincidence Index on Banach Manifolds

Zhang Shisheng　Chen Yuqing

(Department of Math., Sichuan Univ.)

Abstract

In this paper, we study the coincidence index problem on a class of Banach manifolds. Based on the results of [5], we define the coincidence index of the pair of mappings and prove that if the coincidence index is zero, then the coincidence problem has a solution.