第11卷 第2期
1991年5月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL
RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.11 No.2
May, 1991

单纯形上Bernstein多项式凸性定理的逆定理的一个简短证明*

常庚哲　　陈发来

（中国科技大学数学系，合肥）

摘　　要

本文给出了张景中、常庚哲、杨路所证明的《高维单纯形上Bernstein多项式凸性定理的逆定理》[1]的一个简短证明.

§1　介　　绍

我们先引入多重指标的概念．设σ是m维欧氏空间$\mathbf{R}^m$中的单纯形，其顶点为$v^0, v^1, \cdots, v^m$．σ中任一点x可唯一地表为：

$$x=\sum_{i=0}^{m}\lambda_i v^i \tag{1.1}$$

其中λ_i $(i=0,1,\cdots,m)$非负，且$\sum\limits_{i=0}^{m}\lambda_i=1$．称$\lambda=(\lambda_0,\lambda_1,\cdots,\lambda_m)$为$x$关于$\sigma$的重心坐标．

用Z_+^{m+1}表示$m+1$重非负整数指标集．对于$\alpha=(\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_m)\in Z_+^{m+1}$，定义

$$|\alpha|=\alpha_0+\alpha_1+\cdots+\alpha_m, \tag{1.2}$$

$$\alpha!=\alpha_0!\alpha_1!\cdots\cdots\alpha_m!, \tag{1.3}$$

$$\lambda^\alpha=\lambda_0^{\alpha_0}\lambda_1^{\alpha_1}\cdots\cdots\lambda_m^{\alpha_m}. \tag{1.4}$$

设$f(x)$是σ上的函数，与它相应的n阶Barnstein多项式定义为：

$$B_n(f;x)=\sum_{\substack{|\alpha|=n\\ \alpha\in Z_+^{m+1}}}f\left(\frac{\alpha}{n}\right)B_n^\alpha(\lambda;\sigma), \tag{1.5}$$

其中$B_n^\alpha(\lambda;\sigma)$为Bernstein基函数，由下式定义

$$B_n^\alpha(\lambda;\sigma)=\frac{n!}{\alpha!}\lambda^\alpha. \tag{1.6}$$

熟知，如果$f(x)$于σ上凸且连续，那么

$$B_n(f;x)\geq f(x) \tag{1.7}$$

对所有$n\in N$（全体自然数集）及$x\in\sigma$成立（参看[1]）.

常庚哲、张景中等考虑了上述问题的反问题，得出了下面的主要结论[1]．

定理　设$f(x)\in C(\sigma)$，而$f(x)$是σ上连续函数．如果(1.7)式对所有$n\in N$及$x\in\sigma$成立，

* 1989年11月13日收到.

那么 f 于 σ 内达不到非平凡极大.

这里 f 于内点 Q 达到非平凡极大是指，f 于 Q 达到极大，且 Q 的任一邻域内 f 都不是常数.

张与常的证明相当冗长、繁杂，而我们的简化证明相当简洁明瞭.

§2 主 要 引 理

我们首先给出一个定义. 设 $Q=(q_0,q_2,\cdots,q_m)$ 是 σ 的一个内点，对任意 $\varepsilon(0<\varepsilon<1)$，定义

$$\Omega_\varepsilon:=\{(\lambda_0,\lambda_1,\cdots,\lambda_m)\in\sigma\,|\,\lambda_i\geq q_i(1-\varepsilon),\quad i=0,1,\cdots,m\}\tag{2.1}$$

我们有下面的重要引理:

引理 对 $\forall\varepsilon\in(0,1)$，都存在 δ $(0<\delta<\varepsilon)$ 使 $n_0\in N$ 使得，如果 $\frac{\alpha}{n}\in\sigma-\Omega_\varepsilon$，$\frac{\beta}{n}\in\Omega_\delta$，并且 $n\geq n_0$，那么

$$B_n^\beta(Q)>n^{m+1}B_n^\alpha(Q).\tag{2.2}$$

这里 $\alpha,\beta\in Z_+^{m+1}$ 且 $|\alpha|=|\beta|=n$.

证明 假设 $\alpha_i>0$ $(i=0,1,\cdots,m)$. 由Stirling公式，我们有

$$\frac{n!}{\alpha!}=\frac{\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n e^\theta}{\prod_{i=0}^m\sqrt{2\pi\alpha_i}\,(\frac{\alpha_i}{e})^{\alpha_i}e^{\theta_i}}=\sqrt{\frac{n}{(2\pi)^m\prod_{i=0}^m\alpha_i}}\cdot\frac{n^n}{\prod_{i=0}^m\alpha_i^{\alpha_i}}e^{\overline{\theta}}\tag{2.3}$$

其中 $0<\theta_0,\theta_1,\cdots,\theta_m,\theta<1$, $\overline{\theta}=\theta-\theta_0-\theta_1-\cdots-\theta_m$. 于是

$$B_n^\alpha(\theta)=\sqrt{\frac{n}{(2\pi)^m\prod_{i=0}^m\alpha_i}}\cdot\prod_{i=0}^m(\frac{nq_i}{\alpha_i})^{\alpha_i}e^{\overline{\theta}}.\tag{2.4}$$

命
$$p_i=\frac{\alpha_i}{n},\quad(i=0,1,\cdots,m)\tag{2.5}$$

注意到 $p_0+p_1+\cdots+p_m=1$，(2.4)可改写成

$$B_n^\alpha(Q)=\sqrt{\frac{n}{(2\pi)^m\prod_{i=0}^m\alpha_i}}\left(\prod_{i=0}^m(\frac{q_i}{p_i})^{p_i}\right)^n e^{\overline{\theta}}.\tag{2.6}$$

由一个基本不等式(参看[2]，2.14)有

$$\prod_{i=0}^m(\frac{q_i}{p_i})^{p_i}\leq\sum_{i=0}^m p_i\cdot\frac{q_i}{p_i}=1\tag{2.7}$$

等号成立当且仅当 $p_i=q_i$ $(i=0,1,\cdots,m)$. 命

$$\rho:=\max_{\lambda\in\sigma-\Omega_\varepsilon}\prod_{i=0}^m(\frac{q_i}{\lambda_i})^{\lambda_i}<1\tag{2.8}$$

则由(2.6)知，

$$B_n^\alpha(Q)\leq\sqrt{\frac{n}{(2\pi)^m}}\rho^n e.\tag{2.9}$$

同时，存在 δ $(0<\delta<\varepsilon)$ 使得

$$\tau:=\min_{\lambda\in\Omega_\delta}\prod_{i=0}^m(\frac{q_i}{\lambda_i})^{\lambda_i}>\rho,\tag{2.10}$$

类似展开 $B_n^{\beta}(Q)$ 可得

$$B_n^{\beta}(Q) \geq \sqrt{\frac{1}{(2\pi n)^m}}\,\tau^n e^{-(m+1)} \tag{2.11}$$

比较(2.9)与(2.11)即知(2.2)对充分大的 n 成立.

§3 定理的证明

假设 $f(x)$ 于内点 Q 达到非平凡极大. 不妨设 $f(Q)=0$, 则存在 $\varepsilon\in(0,1)$ 使得 $f(x)$ 于 Ω_ε 上非正. 由主要引理知, 存在 $\delta\ (0<\delta<\varepsilon)$ 及 $n_0\in N$ 使得, 如果

$$\frac{\alpha}{n}\in\sigma-\Omega_\varepsilon,\quad \frac{\beta}{n}\in\Omega_\delta \text{且 } n\geq n_0,$$

那么

$$B_n^{\beta}(Q)>n^{m+1}B_n^{\alpha}(Q). \tag{3.1}$$

记

$$a_n:=\max\{B_n^{\alpha}(Q)\,\Big|\,\frac{\alpha}{n}\in\sigma-\Omega_\varepsilon,\ \alpha\in Z_+^{m+1},\ |\alpha|=n\}, \tag{3.2}$$

$$b_n:=\min\{B_n^{\beta}(Q)\,\Big|\,\frac{\beta}{n}\in\Omega_\delta,\ \beta\in Z_+^{m+1},\ |\beta|=n\}. \tag{3.3}$$

则

$$b_n>n^{m+1}a_n \tag{3.4}$$

对 $n\geq n_0$ 成立.

注意到 $f(x)$ 于 Q 达到非平凡极大, 所以存在区域 $\Delta(\subset\Omega_\delta)$, $f(x)$ 于 Δ 上的最大值(记为 $-h$, $h>0$)是负的. 记 $f(x)$ 于 σ 上最大值为 L. 于是,

$$B_n(f;Q)=\sum_{\frac{\alpha}{n}\in\sigma-\Omega_\varepsilon} f(\frac{\alpha}{n})B_n^{\alpha}(Q)+\sum_{\frac{\alpha}{n}\in\Omega_\varepsilon-\Delta} f(\frac{\alpha}{n})B_n^{\alpha}(Q)+\sum_{\frac{\alpha}{n}\in\Delta} f(\frac{\alpha}{n})B_n^{\alpha}(Q) \tag{3.5}$$

记上式右边三项分别为 $\Sigma_1,\Sigma_2,\Sigma_3$. 则

$$\Sigma_1<La_n\sum_{\frac{\alpha}{n}\in\sigma}1=L\binom{m+n}{m}a_n\leq L(m+1)n^m a_n, \tag{3.6}$$

$$\Sigma_2\leq 0, \tag{3.7}$$

$$\Sigma_3\leq -hbn<-hn^{m+1}a_n. \tag{3.8}$$

因此,

$$B_n(f;Q)<(L(m+1)-hn)n^m a_n<0. \tag{3.9}$$

对 $n>\max\{n_0,L(m+1)/h\}$ 成立. 这是不可能的. ■

参考文献

[1] 张景中、常庚哲、杨路, 高维单纯形上Bernstein多项式凸性定理的逆定理, 中国科学, 6(1989), 588—599.

[2] G.H.Hardy, J.E.Littlewood and G.Polya, INEQUALITIES, Cambridge University press, 2nd Edition, 1952.