第11卷 第2期
1991年5月
数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol.11 No.2
May., 1991

正态分布方差SPRT的max$E(n)$*

刘 汉 广
（南京审计学院）

一、$E(n)$的最大值

〔1〕中讨论了正态分布$N(\mu,1)$数学期望μ的SPRT的$\max\limits_{\mu}E_{\mu}(n)$，本文进一步讨论正态分布$N(\mu_0,\sigma^2)$方差$\sigma^2$的SPRT $\max\limits_{\sigma^2}E_{\sigma^2}(n)$.

设$r.v.X\sim N(\mu_0,\sigma^2)$，其中$\mu_0$为已知常数，作假设$H_0(\sigma^2=\sigma_0^2)$及备选假设$H_1(\sigma^2=\sigma_1^2)$，这里有$\sigma_1^2>\sigma_0^2$，并设$X$的概率密度函数为$f(x,\sigma^2)$. 令

$$Z=\ln\frac{f(x,\sigma_1^2)}{f(x,\sigma_0^2)}=\ln\frac{\sigma_0}{\sigma_1}+(x-\mu_0)^2\left[\frac{1}{2\sigma_0^2}-\frac{1}{2\sigma_1^2}\right],$$

$$I_m=\sum_{i=1}^{m}Z_i=m\ln\frac{\sigma_0}{\sigma_1}+\sum_{i=1}^{m}(x_i-\mu_0)^2\left[\frac{1}{2\sigma_0^2}-\frac{1}{2\sigma_1^2}\right],$$

SPRT是如下进行的：在已取出第m个元素情况下，如果$I_m\geq\ln A$，则接受H_1；如果$I_m\leq\ln B$，则接受H_0；如果$\ln B<I_m<\ln A$，则再继续抽取第$m+1$个元素．这里A与B各为：

$$A=\frac{1-\beta}{\alpha}\ ,\quad B=\frac{\beta}{1-\alpha},$$

其中α与β各表示第一类与第二类错判概率．

经过计算，其对应的OC函数为：

$$L(\sigma^2)=\frac{A^h-1}{A^h-B^h}\ ,\ \sigma^2=\frac{\left(\frac{\sigma_0}{\sigma_1}\right)^{2h}-1}{h\left(\frac{1}{\sigma_1^2}-\frac{1}{\sigma_0^2}\right)}\qquad(1)$$

$$t_0=\frac{2\ln B}{\frac{\sigma_1^2-\sigma_0^2}{\sigma_0^2\sigma_1^2}},\quad t_1=\frac{2\ln A}{\frac{\sigma_1^2-\sigma_0^2}{\sigma_0^2\sigma_1^2}},\qquad S=\frac{\ln\frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2}}{\frac{\sigma_1^2-\sigma_0^2}{\sigma_0^2\sigma_1^2}},$$

则有

$$E_{\sigma^2}(n)\approx\frac{L(\sigma^2)(t_0-t_1)+t_1}{\sigma^2-S} \tag{2}$$

定理 1 令

$$E^*_{\sigma^2}(n)=\frac{L(\sigma^2)(t_0-t_1)+t_1}{\sigma^2-S} \tag{3}$$

则 $E^*_{\sigma^2}(n)$ 在 $\sigma^2=S$ 处达到最大值，且这个最大值是 $E^*_s(n)=\frac{-\ln A\cdot\ln B}{2(\ln\frac{\sigma_1}{\sigma_0})^2}$.

推论 正态分布方差SPRT的平均样本容量 $E_{\sigma^2}(n)$ 在 $\sigma^2=S$ 近旁达到最大值 $E_s(n)$，且最大值为 $E_s(n)\approx\frac{-\ln A\cdot\ln B}{2(\ln\frac{\sigma_1}{\sigma_2})^2}$.

定理 2 设 $0<\sigma_0^2<\sigma_1^2<+\infty$，则 $\sigma_0^2<S<\sigma_1^2$.

证明 先证不等式左边成立，它等价于

$$1-\frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2}<\ln\frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2}$$

现对任意固定的 $\sigma_0^2\in(0,+\infty)$，令

$$f(\sigma_1^2)=1-\frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2}-\ln\frac{\sigma_1^2}{\sigma_9^2}$$

于是

$$f'(\sigma_1^2)=\frac{1}{\sigma_1^2}(\frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2}-1)<0.$$

所以 $f(\sigma_1^2)$ 在 $(\sigma_0^2,+\infty)$ 上严格单调下降，又因 $f(\sigma_0^2)=0$，故 $f(\sigma_1^2)<0$，$\forall\sigma_1^2\in(\sigma_0^2,+\infty)$.

同理可证不等式右端成立.

二、在相同的 α、β 下，一次抽检的样本容量

定理 3 设 $r,v,X\sim N(\mu_0,\sigma^2)$，其中 σ^2 未知，作假设 $H_0(\sigma^2=\sigma_0^2)$ 及备选假设 $H_1(\sigma^2=\sigma_1^2)$，且有 $\sigma_1^2>\sigma_0^2$，则在给定 α 及 β 的情形下，一次抽检的样本容量 n 可由下式确定:

$$\chi^2_\alpha(n)=\frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2}\chi^2_{1-\beta}(n).$$

其中 $\chi^2_\alpha(n)$ 是自由度为 n 的 χ^2 分布的上 100α 百分位点，$\chi^2_{1-\beta}(n)$ 是自由度为 n 的 χ^2 分布的上 $100(1-\beta)$ 百分位点.

证明 设 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\chi_i-\mu_0)^2\geq T$ 时，拒绝 H_0；

$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\chi_i-\mu_0)^2<T$ 时，接受 H_0.

当 H_0 为真时，$\frac{1}{n}\sum(\chi_i-\mu_0)^2\geq T$ 的概率为 α，即

$$P\left\{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\chi_i-\mu_0}{\sigma_0}\right)^2 \geq \frac{nT}{\sigma_0^2}\right\}=a,$$

所以 $\chi_a^2(n)=\frac{nT}{\sigma_0^2}$， $T=\frac{\sigma_0^2}{n}\chi_a^2(n)$ （4）

同理，当 H_1 为真时，有

$$T=\frac{\sigma_1^2}{n}\chi_{1-\beta}^2(n), \tag{5}$$

由（4）式与（5）式得：

$$\chi_a^2(n)=\frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2}\chi_{1-\beta}^2(n). \tag{6}$$

由（6）式定出的 n 就是一次抽检的样本容量．

在决定抽检方案的类型时，可将 $E_s^*(n)$ 的值与（6）式中所确定的 n 值进行比较，若 $E_s^*(n)<n$，则采用SPRT．

参 考 文 献

［1］刘汉广，徐州师院学报（自然科学版）1987年第1期．

［2］A. Wald, "Sequential Analysis", 1947.

The ASN's Maximum of Normal Distribution $N(\mu_0,\sigma^2)$ for σ^2 SPRT

Liu Hanguang

(Nanjing Audit Institute)

Abstract

In this paper the explicit formulae of ASN's maximum are derived for SPRT under normal distribution $N(\mu_0,\sigma^2)$, where σ^2 is an unknown parameter. And under the same condition we have obtained the size of sample of single sampling inspection plan.