第11卷 第2期
1991年5月
数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol.11 No.2
May. 1991

整函数及其导函数的素性*

乔 建 永
（淮北煤炭师范学院数学系，淮北）

本文研究复合意义下整函数及其导函数的分解问题．文[1，P213]中曾提出下述

臆测 设 $F(z)$ 为一有穷级的超越整函数，若 $F(z)$ 为 E-拟素的，所有其导函数 $F^{(n)}(z)$ $(n=1,2,\cdots)$ 亦必为拟素的（或试构造一个有穷级超越拟素整函数 $F(z)$，对某个 k，$F^{(k)}(z)$ 非为拟素的）．

问题1 当 $F(z)$ 为无穷级时如何？

问题2 是否可找到一个整函数 $F(z)$，使得在函数簇 $\{F^{(n)}(z);\ n=0,1,2,\cdots\}$ 中有无限多个元素为复合的及无限多个元素为素的？

设 f, g 为二超越整函数，记 $h(z)=f(g(z))$ 以及 $G(z)=\int_0^z h(\zeta)\,d\zeta+az$．由[1，P196]定理4.9知，存在复常数 a，使得整函数 $G(z)$ 为素的．然而，显然 $G'(z)=h(z)+a$ 为复合的．这样，上述臆测及问题前半部分的答案基本明确．本文证明了下述定理，从而彻底解决了上述臆测及问题．

定理 任给实数 $\rho\geq 1$，则存在 ρ 级超越整函数 $F(z)$，使得函数簇 $\{F^{(n)}(z);\ n=0,1,2,\cdots\}$ 中有无限多个元素是复合的及无限多个元素是素的．

为了证明上述定理，需要以下结果

引理[2] 设 $H(w)$ 是奇超越整函数，$H(\sin z)$ 的级有穷，记 $H_a(z)=\cos z(H(\sin z)+2a)$．则集合

$$E=\{a\in \mathbf{C};\ H_a(z)\text{不是素的}\}$$

最多为可数集．

定理的证明 对于实数 $\rho\geq 1$，由[3]中结果知，存在适当的超越整函数 $h(w)$，使 $h(\sin z)$ 的级为 ρ．记 $H(w)=wh(w^2)$ 及 $H_a(z)=\cos z(H(\sin z)+2a)$．则显然 $H(w)$ 为一奇超越整函数，且 $H_a(z)$ 的级为 ρ．以下证明

$$H_a^{(2n)}(z)=\cos z(H_{2n}(\sin z)+2(-1)^n a)\quad (n=0,1,2,\cdots) \tag{1}$$

其中 $H_{2n}(w)$ 为某一奇超越整函数．

首先由前面讨论知，$n=0$ 时(1)式成立．假如 $n=k$ 时(1)式成立，即存在某个奇超越整函数 $H_{2k}(w)$，使得

$$H^{(2k)}(z)=\cos z(H_{2k}(\sin z)+2(-1)^k a). \tag{2}$$

* 1989年6月20日收到．1990年12月25日收到修改稿．

不妨设 $H_{2k}(w)=\sum_{j=0}^{\infty}A_{2j+1}w^{2j+1}$ $(|w|<\infty)$．则对(2)求两次导数，并记 $H_{2(k+1)}(w)=-H_{2k}(w)-3wH_{2k}'(w)+(1-w^2)H_{2k}''(w)$ 可得

$$H^{(2k+1)}(z)=\cos z(H_{2(k+1)}(\sin z)+2(-1)^{k+1}a).$$

下面要证 $H_{2(k+1)}(w)$ 为奇超越整函数．事实上有

$$H_{2(k+1)}(w)=\sum_{j=0}^{\infty}[(4j^2+10j+6)A_{2j+3}-(4j^2+8j+4)A_{2j+1}]w^{2j+1} \qquad (3)$$

记 $B_{2j+1}=(4j^2+10j+6)A_{2j+3}-(4j^2+8j+4)A_{2j+1}$．则由 $H_{2k}(w)$ 的超越性可以断言 $\{B_{2j+1}\}$ 中有无穷多个不为零，从而由(3)知 $H_{2(k+1)}(w)$ 为奇超越整函数．故(1)式对 $n=k+1$ 也成立．由数学归纳法原理知，(1)式对于 $n=0$ $1,2,\cdots$ 恒成立．

对于 $H_a^{(2n)}(z)$，由引理知 $E_n=\{a\in\mathbf{C};\ H_a^{(2n)}(z)$ 不是素的$\}$ 最多为可数集．选取一个复数 $a\notin\bigcup_{n=0}^{\infty}E_n$．并记 $F(z)=H_a(z)$．则 $\{F^{(2n)}(z);\ n=0,1,2,\cdots\}$ 中的元素全为素的． 而 $F^{(2n+1)}(z)=-\sin z(H(\sin z)+2(-1)^n a)+(1-\sin^2 z)H_{2n}'(\sin Z)$ 显然为复合的．即存在 ρ 级整函数 $F(z)$，使得函数簇 $\{F^{(n)};\ n=0,1,2,\cdots\}$ 中有无限多个元素为复合的及无限多个元素为素的。 ■

参 考 文 献

[1] 庄圻泰和杨重骏，亚纯函数的不动点与分解论，北京大学出版社，1988.

[2] Qiao Jianyong (乔建永), On pseudoprimality of the $2n$-th power of prime entire functions, Kodai Math. J., 11(1988), 224—232.

[3] S. Mori, Order of Composite functions of integral functions, Tohoku Math. J., 22(1970)), 462—479.

The Primality of an Entire Function and its Derivative

Qiao Jianyong

(Huaibei Meitan Teachers College)

Abstract

In this paper, we deal with the factorization of entire functions in the sense of composition, and prove the following.

Theorem. For any real number $\rho\geq 1$, there exists a transcendental entire function $F(z)$ of order ρ, such that there are infinitely many prime elements and infinitely many composite elements in the class $\{F^{(n)},\ n=0,1,2,\cdots\}$.