第12卷第1期
1992年2月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION

Vol. 12 No. 1
Feb. 1992

一类非线性方程分歧解的稳定性*

尹 群
(华东工学院应用数学系，南京 210014)

摘 要

本文讨论了一类方程 $K\frac{du}{dt}=F(\lambda,u)$ 分歧解的存在性及稳定性. 这里 K 是依赖于实参数 λ 的解析算子.

引 言

H. F. Weinberger 在[2]、[3]中，在存在 K 一单本征值的假定下，讨论了方程

$$K\frac{du}{dt}=F(\lambda,u).$$

分歧解的稳定性. 本文去掉存在K一单本征值的假定(这时，在一般情况下不能保证分歧解的存在性，见[2])，并将原问题中的常算子 K 推广为依赖于实参数 λ 的算子 $K(\lambda)$，在解析的条件下，利用 Taylor 展式来讨论方程

$$K(\lambda)\frac{du}{dt}=F(\lambda,u). \tag{1}$$

的分歧解的稳定性.

§1 若干假定

设 X,Y 是实 Banach 空间，且 $Y\subset X$，V 是 Y 中的零点的一个邻域，考察方程(1). 记

$$G(\lambda,u)\triangleq K(\lambda)\frac{du}{dt}-F(\lambda,u)=0, \tag{2}$$

其中 $F:[-a,a]\times V\to X$ 是解析的，且假定

$$F(\lambda,u)=\sum_{\substack{j=0\\r=2}}^{\infty}\lambda^j C_{jr}(u), \tag{3}$$

这里 $G_{jr}(u)=F_j^{(r)}(u,u,\cdots,u)$.

$$F(\lambda,0)=0,|\lambda|\leqslant a.$$

$K(\lambda):X\to X$ 是解析的闭线性算子，且假定

$$K(\lambda)=K+\lambda B_1+\lambda^2B_2+\cdots,\quad |\lambda|<\varepsilon_1.$$

* 1990年2月21日收到.

在 $D(K)$ 中定义图象范数 $\|u\| + \|Ku\|$，因为 K 是闭算子，故 $D(K)$ 亦为 BanachA 空间.

由(2)可知

$G:[-a_1,a_1]\times V\to X$ 解析，且满足

$$G(\lambda,0)=0,\qquad |\lambda|\leqslant a_1,\quad (a_1\leqslant a).$$

即(2)有解簇 $\{(\lambda,0):|\lambda|\leqslant a_1\}$.

若 $K=K(0)$ 是零指标的 Fredholm 算子，K 的谱中包含孤立的单本征值零，则 $X=N(K)\oplus R(K)$，且 $R(K)$ 是 K 的不变子空间，存在 $\varphi_0\in N(K)$，$\varphi_0^*\in X^*$，使得

$$N(K)=\mathrm{span}\{\varphi_0\},$$
$$R(K)=\{u\in X,\varphi_0^*u=0\},$$
$$\varphi_0^*\varphi=1.$$

设 $\mu(\lambda)$ 是 $K(\lambda)$ 的单本征值：

$$K(\lambda)\varphi(\lambda)=\mu(\lambda)\varphi(\lambda),\qquad |\lambda|<\varepsilon_2,$$

其中 $0\neq\varphi(\lambda)\in Y$，$\mu(0)=0$. $\varphi_0=\varphi(0)$，且假定 $\mu(\lambda)$ 存在一个收敛的扰动级数

$$\mu(\lambda)=\mu_1\lambda+\mu_2\lambda^2+\cdots,\qquad |\lambda|<\varepsilon_3.$$

因 $\mu(0)=0$，故上式右端无常数项.

§2　分歧方程的建立

定义投影算子 $P:X\to N(K)$

$$Pu=\varphi_0^*u\cdot\varphi_0,\qquad u\in X,$$
$$Q=I-P,\quad (I\text{ 是恒等映射}),$$

则有 $R(K)=R(Q)=QX$. K 的逆算子

$$K^{-1}:QX\to QX\cap D(K).$$

在图象范数下连续. 且可以证明(类似[4]. Ⅰ).

$$\mu_1=\varphi_0^*B_1\varphi_0,\tag{4.1}$$

$$\begin{aligned}\mu_l&=\varphi_0^*B_l\varphi_0+\sum_{\substack{j+i=l-1\\ j\geqslant1,i\geqslant0}}\varphi_0^*B_jB_{i0}\varphi_0\\&=\sum_{n=0}^{l-3}\sum_{m=1}^{l-2-n}\sum_{\substack{j+r=n-1\\ j\geqslant1,r\geqslant0}}\varphi_0^*B_jB_{rm}\varphi_0\sum_{\sum_{i=1}^{m}v_i=l-2-n}\mu_{v_1}\cdots\mu_{m}\ (l\geqslant2).\end{aligned}\tag{4.2}$$

其中

$$B_{00}\varphi_0=-K^{-1}QB_1\varphi_0,\tag{4.3}$$
$$B_{0m}\varphi_0=K^{-1}B_{0,m-1}\varphi_0,\qquad (m\geqslant1),$$

$$B_{n0}\varphi_0=-K^{-1}\sum_{\substack{j+i=n+1\\ j\geqslant1,i\geqslant0}}QB_jB_{i-1,0}\varphi_0,\qquad (B_{-1,0}\varphi_0=\varphi_0,n\geqslant0),\tag{4.4}$$

$$B_{nm}\varphi_0=-K^{-1}\sum_{\substack{j+i=n\\ j\geqslant1,i\geqslant0}}QB_jB_{im}\varphi_0+K^{-1}B_{n,m-1}\varphi_0,\qquad (m\geqslant1,n\geqslant0).$$

因 $X = N(K) \oplus R(K)$，对于 $u \in D(K)$，有 $u = v + w$，这里 $v = Pu \in N(K)$，$w = Qu \in R(K) = QX$. 故 $KPu = 0$，于是(2)式即为

$$PB(\lambda)(\frac{dv}{dt} + \frac{dw}{dt}) - PF(\lambda, v + w) = 0, \tag{5.1}$$

$$K\frac{dw}{dt} + QB(\lambda)(\frac{dw}{dt} + \frac{dw}{dt}) - QF(\lambda, v + w) = 0, \tag{5.2}$$

其中 $B(\lambda) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^j B_j$.

若(5.2)在 $\Omega = \{\lambda \mid |\lambda| < \delta\} \times N_0$，（$\delta > 0$，$N_0$ 为零点的某邻域）上存在解析解 $w = w(\lambda, v)$，且

$$w = \sum_{\substack{j=0 \\ \delta=1}}^{\infty} \lambda^j A_{js}(v). \tag{6}$$

(6)式右端的收敛性是在图象范数意义下定义的.

将 $B(\lambda) = \sum_{j=1}^{\infty} B_j \lambda^j$ 和(6)式代入(5.2)式：

$$K\sum_{\substack{j=0 \\ s=1}}^{\infty} \frac{d}{dt}A_{js}(v)\lambda^j + Q(\sum_{j=1}^{\infty} B_j\lambda^j)(\frac{dN}{dt} + \sum_{\substack{j=0 \\ s=1}}^{\infty} \frac{d}{dt}A_{js}(v)\lambda^j)$$
$$+ QF(\lambda, v + \sum_{\substack{j=0 \\ s=1}}^{\infty} \lambda^j A_{js}(v)) = 0. \tag{7.1}$$

令 $v = x\varphi_0$，$x = x(t)$ 为 t 的实值函数，则(7.1)式即为

$$K\sum_{\substack{j=0 \\ s=1}}^{\infty} sx^{s-1}\frac{dx}{dt}\lambda^j A_{js}(\varphi_0) + Q(\sum_{j=1}^{\infty} B_j\lambda^j)(\frac{dx}{dt}\varphi_0 + \sum_{\substack{j=0 \\ s=1}}^{\infty} sx_{s-1}\frac{dx}{dt}\lambda^j A_{js}(\varphi_0))$$
$$+ QF(\lambda, x\varphi_0 + \sum_{\substack{j=0 \\ s=1}}^{\infty} \lambda^j x^s A_{js}(\varphi_0)) = 0. \tag{7.2}$$

由(7.2)式比较系数可得：

$$KA_{01}(\varphi_0) = 0,$$
$$KA_{11}(\varphi_0) + Q[B_1\varphi_0 + B_1A_{01}(\varphi_0)] = 0,$$
$$KA_{21}(\varphi_0) + Q[B_2\varphi_0 + B_1A_{11}(\varphi_0) + B_1A_{01}(\varphi_0)] = 0,$$
$$\cdots\cdots$$
$$KA_{n1}(\varphi_0) + Q[B_n\varphi_0 + \sum_{\substack{j+i=n \\ i,j\geq 1}} B_jA_{i1}(\varphi_0)] = 0 \qquad (n \geq 3).$$

即

$$A_{11}(\varphi_0) = - K^{-1}QB_1\varphi_0, \tag{8.1}$$

$$A_{111}(\varphi_0) = - [K^{-1}QB_n\varphi_0 + \sum_{\substack{j+i=n \\ i,j\geq 1}} K^{-1}QB_jA_{i1}(\varphi_0)] \qquad (n \geq 2). \tag{8.2}$$

且可以证明 A_{n1} 与 $B_{n-1,0}$ 满足

$$A_{n1}(\varphi_0) = B_{n-1,0}\varphi_0 \qquad (n \geq 1). \tag{9}$$

事实上，当 $n=1$ 时，由(8.1)式及(4.3)式：

$$A_{11}(\varphi_0) = -K^{-1}QB_1\varphi_0 = B_{00}\varphi_0.$$

假设对于 $l < n(n \geqslant 2)$ 时，有

$$A_{l1}(\varphi_0) = B_{l-1,0}\varphi_0.$$

由(4.4)式：

$$\begin{aligned}
B_{n-1,0}\varphi_0 &= -K^{-1}\sum_{\substack{j+i=n\\ j\geqslant 1,i\geqslant 1}} QB_jB_{i-1,0}\varphi_0 \\
&= -(K^{-1}QB_nB_{-1,0}\varphi_0 + K^{-1}\sum_{\substack{j+i=n\\ i,j\geqslant 1}} QB_jB_{i-1,0}\varphi_0) \\
&= -(K^{-1}QB_n\varphi_0 + \sum_{\substack{j+i=n\\ i,j\geqslant 1}} K^{-1}QB_jB_{i-1,0}\varphi_0) \\
&= -(K^{-1}QB_n\varphi_0 + \sum_{\substack{i+i=n\\ i,j\geqslant 1}} K^{-1}QB_jA_{i1}\varphi_0).
\end{aligned}$$

再由(8.2)式可得(9)式成立.

由(5.1)式：

$$P[B(\lambda)(\frac{dN}{dt} + \frac{dw}{dt}) - F(\lambda, v+w)] = 0,$$

所以

$$B(\lambda)(\frac{dN}{dt} + \frac{dw}{dt}) - F(\lambda, v+w) \in R(K),$$

则

$$\varphi_0^*[B(\lambda)(\frac{dN}{dt} + \frac{dw}{dt}) - F(\lambda, v+w)] = 0.$$

由(3)式，$B(\lambda) = \sum_{j=1}^{\infty} B_j\lambda^j$ 及(6)式：

$$\begin{aligned}
&\varphi_0^*\left[(\sum_{j=1}^{\infty} B_j\lambda^j)\frac{dN}{dt}\right] + \varphi_0^* \sum_{\substack{j=1\\ n=1}}^{\infty} (\lambda^{j+n}B_j\frac{d}{dt}A_{n1}(v)) \\
&+ \varphi_0^* \sum_{r=2}^{\infty}(\sum_{\substack{j=1\\ n=0}}^{\infty} \lambda^{j+n}B_j\frac{d}{dt}A_{nr}(v)) \\
&+ \varphi_0^* \sum_{\substack{j=1\\ r=0}}^{\infty} \lambda^j C_{jr}(v + \sum_{\substack{i=1\\ n=0}}^{\infty} \lambda^i A_{in}(v)) = 0,
\end{aligned} \tag{10}$$

(10)式显然有平凡解 $v=0$. 当 $v = x\varphi_0$ 时，(10)式即为：

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{\infty}(\varphi_0^* B_j\varphi_0)\frac{dx}{dt}\lambda^j + \sum_{i=2}^{\infty}(\sum_{\substack{j+n=i\\ j,n\geqslant 1}} \varphi_0^* B_jA_{n1}(\varphi_0)\frac{dx}{dt}\lambda^i \\
&+ \sum_{r=2}^{\infty}(\sum_{\substack{i=1\\ n=1}} \lambda^{j+n} r\varphi_0^* B_jA_{nr}(\varphi_0)x^{r-1}\frac{dx}{dt}
\end{aligned}$$

$$+\sum_{\substack{j=0\\r=2}}^{\infty}\lambda^j\varphi_0^* C_{jr}(x\varphi_0+\sum_{\substack{i=0\\n=1}}^{\infty}\lambda^i A_{in}(x\varphi_0))=0. \tag{11}$$

因为

$$\sum_{r=2}^{\infty}\sum_{\substack{i=1\\n=0}}^{\infty} r\lambda^{j+n}\varphi_0^* B_j A_{nr}(\varphi_0)x^{r-1}\frac{dx}{dt}$$

$$=\sum_{\substack{i=1\\r=1}}(r+1)(\sum_{\substack{j+n=i\\j\geqslant 1,n\geqslant 0}}\varphi_0^* B_j A_{n,r+1}(\varphi_0))x^r\lambda^i\frac{dx}{dt},$$

记

$$M_{ir}=(r+1)\sum_{\substack{j+n=i\\j\geqslant 1,n\geqslant 0}}\varphi_0^* B_j A_{n,r+1}(\varphi_0),$$

$$N_{jr}\lambda^j x^r=\lambda^j\varphi_0^* C_{jr}(x\varphi_0+\sum_{\substack{j=0\\n=1}}\lambda^i A_{in}(x\varphi_0)).$$

则(11)式即为：

$$\sum_{j=1}^{\infty}(\varphi_0^* B_j\varphi_0)\frac{dx}{dt}\lambda^j+\sum_{i=2}^{\infty}\sum_{\substack{j+n=i\\j,n\geqslant 1}}\varphi_0^* B_j A_{n1}(\varphi_0)\frac{dx}{dt}\lambda^i$$

$$+\sum_{\substack{i=1\\r=1}}^{\infty}M_{ir}\lambda^i x^r\frac{dx}{dt}+\sum_{\substack{j=0\\r=2}}^{\infty}N_{jr}\lambda^j x^r=0. \tag{12}$$

又因为

$$\sum_{i=2}^{\infty}(\sum_{\substack{j+n=i\\j,n\geqslant 1}}\varphi_0^* B_j A_{n1}(\varphi_0))\frac{dx}{dt}\lambda^i$$

$$=\sum_{i=2}^{\infty}(\sum_{\substack{j+n=i\\j,n\geqslant 1}}\varphi_0^* B_j B_{n-1,0}\varphi_0)\frac{dx}{dt}\lambda^i$$

$$=\sum_{i=2}^{\infty}(\sum_{\substack{j+n=i-1\\j\geqslant 1,n\geqslant 0}}\varphi_0^* B_j B_{n,0}\varphi_0)\frac{dx}{dt}\lambda^i$$

$$=\sum_{i=2}^{\infty}(\sum_{\substack{j+n=(i-2)+1\\j\geqslant 1,n\geqslant 0}}\varphi_0^* B_j B_{n,0}\varphi_0)\frac{dx}{dt}\lambda^i,$$

记

$$P_j=\varphi_0^* B_j\varphi_0\qquad(j\geqslant 1),$$

$$P_{i0}=\sum_{\substack{j+n=i+1\\j\geqslant 1,n\geqslant 0}}\varphi_0^* B_j B_{n0}\varphi_0\qquad(i\geqslant 0).$$

则(12)式即为

$$\sum_{i=1}^{\infty}P_j\lambda^j\frac{dx}{dt}+\sum_{i=2}^{\infty}P_{i-2,0}\lambda^i\frac{dx}{dt}+\sum_{\substack{i=1\\r=1}}^{\infty}M_{ir}\lambda^i x^r\frac{dx}{dt}+\sum_{\substack{j=0\\r=2}}^{\infty}N_{jr}\lambda^j x^r=0. \tag{13}$$

因为

$$\sum_{j=1}^{\infty}P_j\lambda^j\frac{dx}{dt}+\sum_{i=2}^{\infty}P_{i-2,0}\lambda^i\frac{dx}{dt}$$

$$=(P_1\lambda+(P_2+P_{0,0})\lambda^2+\cdots,+(P_n+P_{n-2,0})\lambda^n+\cdots)\frac{dx}{dt},$$

记

$$Q_1 = P_1, \qquad Q_i = P_i + P_{i-2,0} \qquad (i \geqslant 2),$$

并记(13)式左边为 $\Phi(\lambda,x)$，则得到分歧方程

$$\Phi(\lambda,x) = \sum_{i=1}^{\infty} Q_i\lambda^i \frac{dx}{dt} + \sum_{\substack{i=0\\ r=2}}^{\infty} M_{ir}\lambda^i x^r \frac{dx}{dt} + \sum_{\substack{j=0\\ r=2}}^{\infty} N_{jr}\lambda^j x^r = 0. \tag{14}$$

显然有平凡解(0,0)

§3　分歧解的存在性及稳定性

由 μ_i 及 Q_i 的表达式容易得到

$$\mu_1 = Q_1,$$

$$\mu_l = Q_l + \sum_{n=0}^{l-3}\sum_{m=1}^{l-2-n}\sum_{\substack{j+s=n+1\\ j\geqslant 1, s\geqslant 0}} \varphi_0^* B_j B_{sm}\varphi_0 \sum_{\sum_{i=1}^{m} v_i = l-2-n} \mu_{v_1}\cdots\mu_{v_m}. \tag{15}$$

这里 $l \geqslant 2$. 从而有

定理 1　(1)如果 $\mu_1 = \cdots = \mu_{m-1} = 0$，则 $\mu_j = Q_j \qquad (j = 1,2,\cdots,m+1)$；

(2) 如果 $Q_1 = \cdots = Q_{m-1} = 0$，则 $Q_j = \mu_j \qquad (j = 1,2,\cdots,m+1)$；

(3)$\mu_j = 0 \Leftrightarrow Q_j = 0 \qquad (j = 1,2,\cdots)$.

证明　(1)　由(15)式：$\mu_1 = Q_1, \mu_2 = Q_2$，所以当 $\mu_1 = \mu_2 = 0$ 时，$Q_1 = Q_2 = 0$.

而当 $\mu_1 = \mu_3 = 0$ 时，由(15) 式 $0 = Q_3 + 0$，所以 $Q_3 = 0$. 如此这般 $\mu_l = Q_l = 0(l \leqslant m - 1)$.

又当 μ_l 中的下标 $l = m$ 时，μ_{vi} 的下标不能超过 $l - 2 = m - 2$，所以 $\mu_m = Q_m + 0 = Q_m$(因此时 $\mu_{vi} = 0$)，同样 $\mu_{m+1} = Q_{m+1}$.

类似可证明(2)，(3).

下面由定理 1 及分歧方程来讨论方程(2)的分歧点的存在性.

定理 2　设(1) $\mu(\lambda) \equiv 0$；　(2) 对某个 $r_0 \geqslant 2, N_{0r_0} \neq 0, N_{jr_0} = 0 \quad (j = 1,2,\cdots)$，且当 $r < r_0, N_{jr} = 0 \quad (j = 0,1,2,\cdots)$，当 $r \leqslant r_0$ 时 $M_{ir} = 0 \quad (i = 1,2,\cdots)$. 则 $(\lambda,u) \equiv (0.0)$ 不是方程(2)的分歧点.

证明　因 $\mu(\lambda) \equiv 0$，定理 1(3)：$Q_i = 0(i = 1,2,\cdots)$，再由条件(2)方程(14)即为：

$$\sum_{\substack{i=1\\ r=r_0+1}}^{\infty} M_{ir}\lambda^i x^r \frac{dx}{dt} + N_{0r_0}x^{r_0} + \sum_{\substack{j=0\\ r=r_0+1}}^{\infty} N_{jr}\lambda^j x^r = 0.$$

当 $x \neq 0$ 时

$$N_{0r_0} \sum_{\substack{j=1\\ r=1}}^{\infty} M_{i,r_0+r}\lambda^i x^r \frac{dx}{dt} + \sum_{\substack{j=0\\ r=1}}^{\infty} N_{j,r_0+r}\lambda^j x^r = 0,$$

因此，方程(14)没有通过(0,0)的非平凡的解曲线.

故 $(\lambda,u) = (0,0)$ 不是方程(2)的分歧点.

定理 3　若(1)存在 m，使得 $Q_m \neq 0$，且当 $i \leqslant m - 1$ 时，$Q_i = 0$；(2)$N_{0r} = 0(r = 2,3,\cdots)$.

则$(\lambda,u)=(0,0)$为方程(2)的分歧点.

证明 由假设条件,方程(14)即为

$$(Q_m\lambda^m+\sum_{i=m+1}^{\infty}Q_i\lambda^i)\frac{dx}{dt}+\sum_{\substack{i=1\\r=1}}^{\infty}M_{ir}\lambda^i x^r\frac{dx}{dt}+\sum_{\substack{j=1\\r=2}}^{\infty}N_{jr}\lambda^j x^r=0.$$

显然上述方程有通过$(\lambda,x)=(0,0)$的解曲线$(\lambda,x)=(0,x)$及$(\lambda,x)=(\lambda,0)$,从而$(\lambda,u)=(0,0)$为方程有的分歧点.

下面讨论分歧解的稳定性,给出本文的最后一个结论.

定理 4 设$(\lambda,u)=(\lambda,x\varphi_0+w(\lambda,x\varphi_0))$为方程(2)的解曲线.且$x(0)=0,x'(0)\neq 0$,则有

$$\mathrm{sgn}\mu(\lambda)=\mathrm{sgn}[x'(0)\Phi(\lambda,0)].$$

这里$\mu(\lambda)$为$K(\lambda)$的单本征值.

证明 由假设,(14)式即为.

$$\Phi(\lambda,0)=x'(0)\sum_{j=1}^{\infty}Q_j\lambda^j,$$

由定理 1,Q_j与μ_j前两个非零数是相等的,所以

$$\mathrm{sgn}\mu(\lambda)+\mathrm{sgn}[x'(0)\Phi(\lambda,0)].$$

参考文献

[1]陈文嵘,非线性泛函分析,甘肃人民出版社, 1982年6月第一版.

[2]H. F. Weinberger, *On the Stability of Bifurcating Solution*, in "*Nonlinear Analysis a Collection of Papers in Honor of Erich Rothe*", pp 219—233. Academic Press, New York, 1978.

[3]H. F. Weinberger, *The Stability of Solutions Bifurcating from Steady or Periodic Solutions*, Univ. Florida Internat, Symp. Dynamical Systems, Academic Press, New York, 1977.

[4]H. Kielhöfer, J. Functional Anal. 38(1980). 416—441.

The Stability of Bifurcate Solutions for a Kind of Nonlinear Equations

Yin Qun

(Dept. of App. Math., East China Inst. of Tech., Nanjing, China)

Abstract

In this paper, we discuss the existence and stability of bifurcate solution for the equation $K\frac{du}{dt}=F(\lambda,u)$, where K is an analytic operator depending on the real parameter λ.