第12卷第1期 数学研究与评论 Vol. 12 No. 1
1992年2月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Feb. 1992

拓扑代数的Arens正则性*

吴从炘 张波
(哈尔滨工业大学,150006) (齐齐哈尔师院,161006)

摘要

Arens[1]在Banach代数A的第二对偶A^{**}中定义了两种乘积,称为Arens乘积. Gulick[2]和Hennefeld[3]又分别讨论了Arens正则性的刻划. 在文[4]中,我们把文[1]中的定义和[2],[3]中的结果推广到一类局部凸拓扑代数. 本文讨论具有H性质的Z-代数的Arens正则性的问题,得到了Arens正则的充分必要条件.

本文讨论的拓扑代数A总假定满足条件:

$$(cx)(dy)=(cd)(xy)\qquad c,d\in C;\quad x,y\in A \tag{$\triangle$}$$

拓扑代数A称为Z-代数是指A是局部凸的,且满足$x_a\to 0\Rightarrow x_ay\to 0$; $yx_a\to 0$关于$y\in B$是一致的. 这里B是A中的任何有界集.

设A为Z-代数,$x,y\in A$;$x'\in A^*$;$x'',y''\in A^{**}=(A^*,\beta(A^*,A))^*$

$$(x'\circ x)(y)=x'(xy)\qquad (x*x')(y)=x'(yx)$$

$$(x''\circ x')(x)=x''(x'\circ x)\qquad (x'*x'')(x)=x'(x*x')$$

$$(x''\circ y'')(x')=x''(y''\circ x')\qquad (x''*y'')(x')=y''(x'*x'')$$

称$x''\circ y''$和$x''*y''$分别Arens第一和第二乘积.

引理1 设A为Z-代数,则对任何的$x\in A,x'\in A^*,x'',y''\in A^{**}$,有$x'\circ x\in A^*$,$x*x'\in A^*$;$x''\circ x',x'*x''\in A^*$,$x''\circ y''\in A^{**}$,$x''*y''\in A^{**}$.

证明见文[4].

我们知道$(A^{**},\circ)$和$(A^{**},*)$在拓扑$\beta(A^{**},A^*)$之下,成为局部凸代数[4]. 易见A^{**}满足条件($\triangle$).

若A^{**}对两种Arens乘积都是Z-代数,则称Z-代数A具有H—性质. 若对任意的自然数n,A^{2n*}对2^n种Arens乘积都是Z-代数,则称A有PH—性质.

这里A^{k*}表示A的第K次对偶,若A具有H性质,则我们可在$(A^{**},\circ)$和$(A^{**},*)$的第二对偶A^{4*}上定义Arens乘积,$(A^{4*},\circ\circ)$和$(A^{4*},\circ *)$表$(A^{**},\circ)$的第二对偶上的Arens第一的第二乘积. $(A^{4*},*\circ)$和$(A^{4*},**)$的意义自明. 我们用e_n表示A^{n*}到$A^{(n+2)*}$的自然嵌入. 用e_0表示A到A^{**}的自然嵌入.

命题1 设Z-代数A具有H—性质. 则下列等价.

(i) A是Arens正则的;

(ii) $e_2:(A^{**},\circ)\to(A^{4*},*\circ)$是同态;

(iii) $e_2:(A^{**},\circ)\to(A^{4*},**)$是同态.

* 1990年2月26日收到.

证 因为 Z-代数 A 具有 H—性质，所以由于自然嵌入是 A 到 A^{**} 的同态[4]，我们知道

$$e_2:\quad (A^{**},\circ)\to(A^{4*},\circ\ \circ)\qquad e_2:\quad (A^{**},*)\to(A^{4*},*\ \circ)$$

$$e_2:\quad (A^{**},\circ)\to(A^{4*},\circ\ *)\qquad e_2:\quad (A^{**},*)\to(A^{4*},*\ *)$$

都是同态映射。另一方面

$$e_2:\quad (A^{**},\circ)\to(A^{4*},*\ \circ)$$

是 $(A^{**},\circ)$ 到 $e_2(A^{**})$ 的满射．即 $e_2:\quad (A^{**},\circ)\to e_2[(A^{**},*)]$ 是映上的，从而 A 是 Arens 正则的．

注 A 具有 H—性质这一条件并不很强，虽然我们还不能证明当 A 为 Z-代数时 A^{**} 一定是 Z-代数，但可以得到下述命题．

命题 2 若 A 为 Z-代数，$x''_\alpha \xrightarrow{\beta(A^{**},A^*)} 0$，则有

$$x''_\alpha\circ y''\xrightarrow{\beta(A^{**},A^*)}0\qquad y''*x''_\alpha\to_{\beta(A^{**},A^*)}0$$

关于 $y''\in B''$ 是一致的，这里 B'' 为 $\beta(A^{**},A^*)$ 有界集．

证明 首先，由 $x''\circ y''$ 的分别连续性可知，若 B'' 为 $\beta(A^{**},A^*)$ 有界集，则对任意 $x''\in A^{**}$，$x''\circ B''=\{x''y'';y''\in B''\}$ 仍为 $\beta(A^{**},A^*)$ 有界集．又若 B' 为 $\sigma(A^*,A^{**})$ 有界集则由于对 $y''_n\in B''$，$x'_n\in B'$ 及 $x''\in A^{**}$ 有

$$x''\left(\frac{1}{n}y''_n\circ x'_n\right)=x''\circ\left(\frac{1}{n}y''_n\right)(x'_n)\to0$$

知 $B''\circ B'=\{x''\circ x';x''\in B'',x'\in B'\}$ 依 $\sigma(A^*,A^{**})$ 有界．对任何 $\sigma(A^*,A^{**})$ 有界集 B'，有

$$x''_\alpha\circ y''(x')=x''_\alpha(y''\circ x')\to0$$

关于 $x'\in B'$，$y''\in B''$ 是一致的． 即

$$x''_\alpha\circ y''\to0$$

关于 $y''\in B''$ 是一致的．同理 $y''*x''_\alpha\to0$ 关于 $y''\in B''$ 是一致的．

命题 3 设 Z-代数 A 是 Arens 正则的，则 A^{**} 是 A^{4*} 的收缩核．

证明 由于 A 是 Arens 正则的，由命题 2 可知 A 具有遗传性．从而 $(A^{4*},\circ\ *)$ 和 $(A^{4*},\circ\ \circ)$ 是局部凸拓扑代数．于是只须证

$$e_1^*:\quad (A^{4*},\circ\ \circ)\to(A^{**},\circ)$$

是同态映射．同样可证 $e_1^*:\quad (A^{4*},\circ\ *)\to(A^{**},\circ)$ 为同态映射．这里 e_1^* 为 e_1 的诱导映射：

$$e_1^*(F)(f)=F[e_1(f)]\qquad f\in A^*,F\in A^{4*}.$$

首先，对 $x'\in A^*$，$x''\in A^{**}$，有

$$e_1(x')\circ\ \circ x''=e_1(x'*x''). \tag{1}$$

事实上，对任意的 $y''\in A^{**}$，有

$$e_1(x')\circ\ \circ x''(y'')=e_1(x')(x''\circ y'')=x''\circ y''(x')$$
$$=x''*y''(x')=y''(x'*x'')=e_1(x'*x'')(y'').$$

根据(1)式可知对 $F\in A^{4*}$，$x'\in A^*$，有

$$F\circ\ \circ e_1(x')=e_1(e_1^*(F)\circ x') \tag{2}$$

事实上，对 $x''\in A^{**}$，有

$$F\circ\ \circ e_1(x')(x'')=F[e_1(x')\circ\ \circ x'']=F[e_1(x'*x'')]$$
$$=e_1^*(F)(x'*x'')=x''*e_1^*(F)(x')=x''\circ e_1^*(F)*x')$$
$$=x''[e_1^*(F)\circ x']=e_1[e_1^*(F)\circ x'](x'').$$

再根据(2)式便知，对 $G\in A^{4*}$，$x'\in A^*$，有

$$\begin{aligned}e_1^*(F\circ\circ G)(x')&=F\circ\circ G[e_1(x')]=F[G\circ\circ e_1(x')]\\&=F[e_1(e_1^*(G)\circ x')]=e_1^*(F)[e_1^*(G)\circ x']\\&=e_1^*(F)\circ e_1^*(G)(x'),\end{aligned}$$

即 $e_1^*(F\circ\circ G)=e_1^*(F)\circ e_1^*(G)$，也即 $e_1^*:(A^{4*},\circ\circ)\rightarrow(A^{**},\circ)$是同态映射.

引理 2(Alaoglu-Bourbaki **定理**[5]) 设(X,Y)是对偶对，T 为 X 的相容拓扑，则 Y 中的每个 T 等度连续集 S 是 $\sigma(Y,X)$相对紧的，对每个 $U\in N(X,T)U^\circ$是 $\sigma(Y,X)$紧的. 这里 U°是 U 的极(polar).

证明见[5]定理 9.1.10.

引理 3 设 X,Y,Z,W 为拓扑空间，X 是紧的，Y 是紧 Hausdorff 的. 若映射 φ,ψ,χ 连续，φ 是满射. 映射 w 使下图可交换，则 w 连续.

$$\begin{array}{ccc}X&\xrightarrow{\varphi}&Y\\ \chi\downarrow&&\downarrow w\\ Z&\xrightarrow{\psi}&W\end{array}$$

证明 由于 X 是紧的，Y 是紧 Hausdorff 的，φ 是连续满射，所以 φ 是闭映射[6]. 于是对 $K\subseteq W$ 由等式

$$w^{-1}(K)=\varphi[\chi^{-1}(\psi^{-1}(K))]$$

即得 w 的连续性.

由上述引理可得如下定理

定理 设 Z-代数 A 具有 H 一性质，则 A 是 Arens 正则的充分必要条件是 $e_1^*:A^{4*}\rightarrow A^{**}$ 为同态. 这里 e_1^* 为同态映射是指对 A^{4*} 和 A^{**} 的某一种确定的 Arens 乘积是同态映射.

证明 必要性命题 3 已得证.

充分性. 只证 $e_1^*:(A^{4*},\circ\circ)\rightarrow(A^{**},\circ)$是同态的情形，其它情形类似.

对任意的 $U\in N(A^{3*},\sigma(A^{3*},A^{4*}))$，令

$$U^{\circ4}=\{F\in A^{4*};|F(u)|<1,u\in U\},$$

$$U^{\circ2}=\{x''\in A^{**};|u(x'')|<1,u\in U\},$$

由引理 2，$U^{\circ4}$是 $\sigma(A^{4*},A^{3*})$紧的.

映射 $e_1^*:A^{4*}\rightarrow A^{**}$ 是满射，且在 A^{4*} 中赋以弱 * 拓扑 $\sigma(A^{4*},A^{3*})$与 A^{**} 中赋弱 * 拓扑 $\sigma(A^{**},A^*)$下是连续的. 事实上 $x_a^{4*}\in A^{4*}$，$x_a^{4*}\rightarrow0$，即对任意的 y^{3*}，有 $x_a^{4*}(y^{3*})\rightarrow0$，于是对任意的 $y'\in A^*$，有 $e_1^*(x_a^{4*})(y')=e_1(y')[e_1^*(x_a^{4*})]=x_a^{4*}[e_1(y')]\rightarrow0$. 因此 $e_1^*:U^{\circ4}\rightarrow U^{\circ2}$也是连续满射. 故$U^{\circ2}$是 $\sigma(A^{**},A^*)$紧的. 由于 A 是分离的，从而 A^{**} 是分离的，故$U^{\circ2}$是 Hausdorff 紧的.

对 $x'',y''\in A^{**}$，对 $F\in U^{\circ4}$，令

$$x:F\rightarrow e_2(x'')\circ\circ F,\quad w:y''\rightarrow x''\circ y''$$

考虑 F 图

$$\begin{array}{ccc}U^{\circ4}&\xrightarrow{e_1^*}&U^{\circ2}\\ \chi\downarrow&&\downarrow w\\ A^{4*}&\rightarrow&A^{**}\end{array}$$

因为 $e_1^*(A^{4*},\circ\circ)\rightarrow(A^{**},\circ)$是同态映射，从而对任意的 $F\in U^{\circ4}$，及 $x'\in A^*$

$$e_1^*[x(F)](x')=e_1^*[e_2(x'')\circ\circ F](x')=e_1^*[e_2(x'')]\circ e_1^*(F)(x')$$

$$=e_1^*[e_2(x'')](e_1^*(F)\circ x')=e_2(x'')[e_1(e_1^*(F)\circ x')]=e_1[e_1^*(F)\circ x'](x'')$$
$$=x''[e_1^*(F)\circ x']=x''\circ e_1^*(F)(x')=w[e_1^*(F)](x')$$

即上图可交换.

由于 $x''_\alpha \xrightarrow{\sigma(A^{**},A^*)} x''$ 可推出对任意的 $y''\in A^{**}$，有 $x''_\alpha\circ y''\xrightarrow{\sigma(A^{**},A^*)} x''\circ y''$. 事实上，因对任意的 $x'\in A^*$ 有 $x''_\alpha(x')\to x''(x')$，又对任意的 $y''\in A^{**}$，由引理 1 $y''\circ x'\in A^*$，于是 $x''_\alpha\circ y''(x')=x''_\alpha(y''\circ x')\to x''(y''\circ x')=x''\circ y''(x')$ 即 $x''_\alpha\circ y''\xrightarrow{\sigma(A^{**},A())} x''\circ y''$. 因此可得 x 是 $\sigma(A^{4*},A^{3*})$ 连续的. 故由引理 3 知 w 是 $\sigma(A^{**},A^*)$ 连续的. 由 U 的任意性可得 $x''\circ y''$ 是依 $\sigma(A^{**},A^*)$ 分别连续的. 又因为由 A 到 A^{**} 的自然嵌入像 $e(A)$ 在 A^{**} 中是 $\sigma(A^{**},A^*)$ 稠的[2]. 所以对任何的 $x'',y''\in A^{**}$，存在 A 中网 x_α,y_γ，使得对任何的 $x'\in A^*$，有

$$\lim_\alpha e(x_\alpha)(x')=x''(x''),\qquad \lim_\gamma e(y_\gamma)(x')=y''(x').$$

由于 $x''\circ y''$ 是 $\sigma(A^{**},A^*)$ 连续的，从而有

$$\lim_\gamma\lim_\alpha e(x_\alpha)\circ e(y_\gamma)(x')=x''\circ y''(x').$$

另一方面，由文[4]引理 6

$$\lim_\gamma\lim_\alpha e(x_\alpha)\circ e(y_\gamma)(x')$$
$$=\lim_\gamma\lim_\alpha(x_\alpha\circ y_\gamma)(x')=x''*y''(x').$$

所以

$$x''\circ y''=x''*y''$$

于是 A 是 Arens 正则的.

推论 设 Z-代数 A 具有 PH 性质. 则 A^{2n*} 中的 2^n 个 Arens 乘积都相同的充分必要条件是对于 $A^{(2n+2)*}$ 和 A^{2n*} 上的任意一种 Arens 乘积，有

$$e_{2n-1}^*:A^{(2n+2)*}\to A^{2n*}$$

是同态映射.

证明 对 n 作归纳

当 $n=1$ 时，定理已证.

假定 $n=k$ 时结论成立.

对自然包含映射

$$\alpha:\ A^{4*}\to A^{(2k+2)*},\quad \beta:\ A^{**}\to A^{2k*},$$
$$\varphi:\ A^{3*}\to A^{(2k+1)*},\quad \psi:\ A^*\to A^{(2k-1)*}.$$

下图可交换

$$\begin{array}{ccccc}
A^{4*} & \xrightarrow{\alpha} & A^{(2k+2)*} & \xrightarrow{\varphi^*} & A^{4*}\\
e_1^*\downarrow & & e_{2k-1}^*\downarrow & & e_1^*\downarrow\\
A^{**} & \xrightarrow{\beta} & A^{2k*} & \xrightarrow{\psi^*} & A^{**}
\end{array}$$

这里 φ^* 和 ψ^* 分别表示 φ 和 ψ 的伴随映射. 从而

$$e_{2k-1}^*|_{A^{4*}}=e_1^*.$$

又由于 A^{4*} 和 A^{**} 上的 Arens 乘积与由 $A^{(2k+2)*}$ 和 A^{2k*} 上的 Arens 乘积导出的 A^{4*} 和 A^{**} 上的乘积是一致的，因而 e_1^* 是同态. 由定理知 A 是 Arens 正则的. 此时 A^{**} 只有一种 Arens 乘积. 令 $B=A^{**}$，则 B 具有 PH 性质. 又 $B^{(2k-2)*}=A^{2k*}$，由归纳假设，所有的 Arens 乘积是一致

的.

反之,若 A^{2n*} 上的所有 Arens 乘积都相同,则由定理知 e_{2n-1}^{*} 是同态.

参考文献

[1] Arens R. F, Proc. Amer. Math. Soc., 2(1951), 839—848.

[2] Gulick S. L, Pacific J. Math., 16(1966), 121—137.

[3] Hennefeld J, Pacific J. Math., 26(1968) 115—119.

[4] 张波，齐齐哈尔师范学院学报,3(1989), 14—21.

[5] Wilansky, Modern Methods in Topological Vector Spaces, McGraw—Hill New—york 1978.

[6] 江泽涵， 拓扑学引论,上海科技出版社, 1979.