第12卷第1期　　数学研究与评论　　Vol. 12 No. 1
1992年2月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Feb. 1992

Γ—环的单位元与其算子环的单位元之间的关系*

陈 维 新
(浙江大学数学系,杭州 310027)

摘　要

Γ—环的单位元是其算子环中的元素．本文探讨Γ—的单位与其算子环的单位元之间的关系．举例表明存在Γ—环(Γ_N—环)M,它的左、右算子环均有单位元,而M既无左单位元,又无右单位元．那么在什么条件下,Γ—环(Γ_N—环)的左、右算子环具有单位元时,其本身必定具有左、右单位元呢？对Γ—环和Γ_N—环分别探讨了此问题,并给出了了解答此问题的充要条件．

Γ—环的乘法单位元比结合的乘法单位元更复杂,更富有变化,故Γ—环的单位元是一个富有Γ—环特色的课题(参见[1])．鉴于Γ—环的单位元是其算子环的元素,本文探讨Γ—环的单位元与其算子环的单位元之间的关系．第一部分讨论Γ—环,第二部分讨论Γ_N—环．

文中凡环均指结合环,一般以A表示,而以M表示Γ—环M,其右算子环记为R,左算子环记为L．对Γ—环的一些常用的基本概念和性质,本文将不再叙述而直接使用,这些概念和性质的叙述可参见[2]、[3]．

§1　Γ—环

据[1]命题1知:若Γ—环M具有右单位元$\sum_{i=1}^{n}[\alpha_i,e_i]$,则$\sum_{i=1}^{n}[\alpha_i,e_i]$为其右算子环$R$的单位元,从而Γ—环$M$的右单位元若存在则必唯一．同样,Γ—环$M$具有左单位元$\sum_{j=1}^{k}[u_j,\beta_j]$,则$\sum_{j=1}^{k}[u_j,\beta_j]$为其左算子环$L$的单位元,从而Γ—环$M$的左单位元若存在则必唯一．

问题是反之如何,即若Γ—环M的左(右)算子环具有单位元,M必具有左(右)单位元吗？

例1　记Z为整数环,N为非零的零乘环,即$N\neq\{0\}$,且对任意的$x,y\in N$有$xy=0$,作:

$$A=\{(m,x)\mid m\in Z,x\in N\},$$

对任意的$(m,x),(n,y)\in A$,定义:

$$(m,x)=(n,y)\Leftrightarrow m=n,x=y,$$
$$(m,x)+(n,y)=(m+n,x+y),$$
$$(m,x)\cdot(n,y)=(mn,xy).$$

据N为零乘环知$(m,x)\cdot(n,y)=(mn,0)$．可直接验证$\{A,+,\cdot\}$为结合环．

* 1990年4月23日收到．浙江省自然科学基金项目．

现取 $M=\{A,+\}$，$\Gamma=\{Z,+\}$，定义 $M\times\Gamma\times M\to M$ 的合成为：

$$(m,x)k(n,y) = k(m,x)\cdot n,y),\forall\ (m,x),(n,y)\in M,\forall\ k\in\Gamma.$$

据 A 中的加法和乘法定义知 $(m,x)k(n,y)=(kmn,0)$，易知对此合成，M 构成 Γ－环.

在 M 中取 $(0,y)\neq(0,0)$，则对任意的 $k\in\Gamma$ 任意的 $(m,x)\in M$ 有

$$(0,y)k(m,x) = (0,0)\neq(0,y),$$
$$(m,x)k(0,y) = (0,0)\neq(0,y).$$

故而 Γ－环 M 既没有左单位元，也没有右单位元.

考察 M 右算子环 R，这里：

$$R = \{\sum_{i=1}^{k}[m_i,(n_i,x_i)]\,|\,m_i\in\Gamma,(n_i,x_i)\in M\}.$$

注意到对 R 中的元素 $[m,(n,x)]$ 和 $[k,(l,y)]$ 只要 $mn=kl$ 就必有

$$[m,(n,x)] = [x,(l,y)]. \tag{*}$$

这是因为对任意的 $(p,z)\in M$ 有

$$\begin{aligned}&(p,z)\{[m,(n,x)]-[k,(l,y)\}\\ &= m(p,z)\cdot(n,x)-k(p,z)\cdot(l,y)\\ &= (mpn,0)-(kpl,0) = (0,0).\end{aligned}$$

下说 R 具有单位元 $[1,(1,y)]$，这是因为对任意的 $[m,(n,x)]\in R$ 有

$$\begin{aligned}[1,(1,y)][m,(n,x)] &= [1,(1,y)m(n,x)]\\ &= [1,(mn,0)] \overset{(*)}{=\!=} m,(n,x)],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[m,(n,x)][1,(1,y)] &= [m,(n,x)(1,y)]\\ &= [m,(n,0)] \overset{(*)}{=\!=} [m,(n,x)].\end{aligned}$$

类似可验证 M 左算子环 L 具有单位元 $[(1,y),1]$.

这例子表明 Γ－环 M 左、右算子环具有单位元，但 M 可以既没有左单位元，又没有右单位元. 于是探讨在什么条件下，Γ－环 M 的左、右算子环具有单位元能导致 M 具有左、右单位元就颇有兴趣.

定义 1 Γ－环 M 中元素 x 称为 M 的右(左)绝对零因子，若 $M\Gamma x=\{0\}$ $(x\Gamma M=\{0\})$. Γ－环 M 称为无绝对零因子，若 M 没有非零的左、右绝对零因子.

定理 1 若 Γ－环 M 的左、右算子环 L、R 均具有单位元，则 M 具有左、右单位元的充要条件为 M 无绝对零因子.

证明 必要性是显然的，下证充分性. 设 R 的单位元为 $\sum_{i=1}^{n}[\alpha_i,e_i]$，此时对任意的 $\beta\in\Gamma$，任意的 $y\in M$ 有 $[\beta,y]\cdot\sum_{i=1}^{n}[\alpha_i,e_i]=[\beta,y]$，即 $\sum_{i=1}^{n}[\beta,y\alpha_ie_i]=[\beta,y]\Rightarrow M\Gamma[(\sum_{i=1}^{n}y\alpha_ie_i)-y]=0$. 据 M 中没有非零的右绝对零因子知 $\sum_{i=1}^{n}y\alpha_ie_i-y=0$，从而 M 有左单位元 $\sum_{j=1}^{n}[\alpha_i,e_i]$.

类似可证若 L 具有单位元 $\sum_{i=1}^{n}[u_j,\beta_j]$，则 $\sum_{j=1}^{n}[u_j,\beta_j]$ 就是 M 的左单位元.

把此定理和[1]的命题 1 结合起来，可得

命题 1 若 Γ－环 M 是无绝对零因子的，则.

一)下述二命题等价

1)M 有右单位元,右单位元为 $\sum_{i=1}^{n}[\alpha_i,e_i]$.

2)R 有单位元,单位元为 $\sum_{i=1}^{n}[\alpha_i,e_i]$.

二)下述二命题等价

1)M 有左单位元,左单位元为 $\sum_{i=1}^{k}[u_i,\beta_i]$.

2)L 有单位元,单位元为 $\sum_{i=1}^{k}[u_i,\beta_i]$.

然此命题一)、二)所述的单位元可以是不同的.

例 2 取 M 为实数域上 n 维欧氏空间($n>1$),取 $\Gamma=\{M,+\}$,定义 $M\times\Gamma\times M\to M$ 的合成为:

$$u\alpha v=(u,\alpha)v,\forall\ u,v\in M,\quad \forall\ \alpha\in\Gamma,$$

其中(u,α)表示 u,α 的内积,则 M 构成 Γ—环.取 M 的一组标准正交基:$e_1,e_2,\cdots,e_n$.对任意的 $0\neq v\in M$ 有 $e_1e_1v=(e_1,e_1)v=v\neq0$,对任意的 $0\neq u\in M$ 有 $uue_1=(u,u)e_1\neq0$.故 Γ—环 M 无绝对零因子,M 具有唯一的左单位元$[e_1,e_1]$,唯一的右单位元 $\sum_{i=1}^{n}[e_i,e_i]$.然而$[e_1,e_1]$不是右单位元,因

$$e_2e_1e_1=(e_2,e_1)e_1=0\neq e_2.$$

同样 $\sum_{i=1}^{n}[e_i,e_i]$不是左单位元,因

$$\sum_{i=1}^{n}e_ie_ie_1=\sum_{i=1}^{n}(e_i,e_i)e_1=ne_1\neq e_1,$$

这表明无论在 R 或 L 中看,均有 $[e_1,e_1]\neq\sum_{i=1}^{n}[e_i,e_i]$.

许多熟知的 Γ—环类是无绝对零因子的,易知半素的 Γ—环无绝对零因子,而左和右本原的 Γ—环是素 Γ—环,素 Γ—环是半素的(参见[4]).故而本原 Γ—环,素 Γ—环,半素 Γ—环均是无绝对零因子的.

§2 Γ_N—环

Γ_N—环,即 Nobusawa 意义下的 Γ—环,是一类特殊的 Γ—环.在§1所述的例1中,我们可定义 $\Gamma\times M\times\Gamma\to\Gamma$ 的合成.

$$k(m,x)l=kml.\qquad \forall\ k,l\in\Gamma,\forall\ (m,x)\in M.$$

直接验证知此时 M 构成 Γ_N—环.这表明即使在 Γ_N—环中还是可以有:Γ_N—环 M 的左、右算子环均具有单位元,而 M 既没有左单位元又没有右单位元.为此我们将继续§1中的问题,为篇幅计本节所有结果均略去证明.

定理 2 若 Γ_N—环 M 的左、右算子环 L,R 均具有单位元,则 M 具有左、右单位元的充要条件为 Γ 是 M_N—环.

Kyuno 在[3]的引理 2.2 证明中，阐明了 Γ_N—环 M 的加群$\{\Gamma,+\}$关于 $\Gamma\times M\times\Gamma\to\Gamma$ 的合成构成 M—环，然一般不是 M_N—环(Nobusawa 意义下的 M—环). 可以证明当 Γ_N—环无绝对零因子时 Γ 为 M_N—环. 这些均表明上述定理是恰当的.

类似于命题 1 可有

命题 3 若 M 为 Γ_N—环，Γ 为 M_N—环，则下述命题等价：

1) M 有右(左)单位元 $\sum_{i=1}^{n}[\alpha_i,e_i](\sum_{j=1}^{n}[u_j,\beta_j])$.

2) $R(L)$有单位元 $\sum_{i=1}^{n}[\alpha_i,e_i](\sum_{j=1}^{n}[u_j,\beta_j])$.

然而在 Γ_N—环中还有：

命题 4 若 M 为 Γ_N—环，Γ 为 M_N—环，则下述命题等价：

1) M 有右(左)单位元 $\sum_{i=1}^{n}[\alpha_i,e_i](\sum_{j=1}^{n}[u_j,\beta_j])$.

2) Γ 有左(右)单位元 $\sum_{i=1}^{n}[\alpha_i,e_i](\sum_{j=1}^{n}[u_j,\beta_j])$.

注意到此命题所说的 M 的右单位元 $\sum_{i=1}^{n}[\alpha_i,e_i]$和 Γ 的左单位元 $\sum_{i=1}^{n}[\alpha_i,e_i]$虽然形式相同，但前者是 M 的右算子环 R 中的元素，后者是 Γ 的左算子环 L' 中的元素，而 R 和 L' 的加群是由 $\Gamma\times M$ 生成的自由 *Abel* 群的二个相异的商群，从而这二个 $\sum_{i=1}^{n}[\alpha_i,e_i]$形同实异. 同样地二个 $\sum_{j=1}^{n}[u_j,\beta_j]$也如此，然而这结果是可以改进的.

命题 5 在定义 $R\times\Gamma\to\Gamma$ 的合成 $\sum_{i=1}^{n}[\delta_i,x_i]\cdot\gamma=\sum_{i=1}^{n}\delta_i x_i\gamma$ 后，Γ 可成为 R—左模，此时命题 4 所述的 Γ 左单位元 $\sum_{j=1}^{n}[\alpha_i,e_i]$可以是 M 的右算子环 R 中的元素. 同样处理可使 Γ 的右单位元 $\sum_{i=1}^{n}[u_j,\beta_j]$成为 L 中的元素.

结合命题 3，命题 4 和命题 5 可得：

定理 3 若 M 为 Γ_N—环，Γ 为 M_N—环，则下述命题等价：

1) M 有右(左)单位元 $\sum_{i=1}^{n}[\alpha_i,e_i](\sum_{j=1}^{k}[u_j,\beta_j])$.

2) Γ 有左(右)单位元 $\sum_{i=1}^{n}[\alpha_i,e_i](\sum_{j=1}^{k}[u_j,\beta_j])$.

3) $R(L)$有单位元 $\sum_{i=1}^{n}[\alpha_i,e_i](\sum_{j=1}^{n}[u_j,\beta_j])$.

且上述 $\sum_{i=1}^{n}[\alpha_i,e_i](\sum_{j=1}^{n}[u_j,\beta_j])$ 是 $R(L)$ 中同一元素.

当然此定理所说的 R 和 L 的单位元即使在 $\Gamma=M$ 情况下也可以是不同的. 这只要在 §1 的例 2 中 Γ—环 M 中定义 $\Gamma\times M\times\Gamma\to\Gamma$ 的合成为

$$\alpha x\beta=(x,\beta)\alpha,\forall\ \alpha,\beta\in\Gamma,\forall\ x\in M$$

直接验证知 M 为 Γ_N一环,Γ 为 M_N一环,而前已表明此时 R 和 L 的单位元是不同的.

参考文献

[1]陈维新,Γ一环的单位元,数学研究与评论,11;3(1991),319—323.
[2]Coppage, W. E. ,Luh, J. , *Radicals of gamma rings*, J. Math. Soc. Japan, 23;1(1971),40—52.
[3]Kyumo, S. , *Nobusawa's gama rings with the right and left unities* ,Math, Japonica ,25;2(1980),179—190.
[4]Luh, J. , *On the theory of sample Γ—rings*, Michigan Math, J. , 16(1969),65—75.

A New Globally Convergent Algorithm for Nonlinear Constrainted Optimization Problems

Wei Zhenxin
(Dept. of Math., Guangxi University, Nanning, China)

Abstract

In order to guarantee the globally convergence of the diffenence type SQP methods whose recently gave for the nonlinear constrainted optimization problems, they use the technique of penalty functions, so they must to correct the penalty parameter carefully. In this paper, we present a method which not only do not depend on the penalty parameter and the correct matrix can not are positive, and it possesses global convergence property but also, and the form penalty functions are simple and the rate of smooth of it equals to the rate of constrainted functions.