第12卷第1期 1992年2月 数学研究与评论 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Vol. 12 No. 1 Feb. 1992

PS 环的同调性质*

岳 勤
(徐州师范学院数学系,江苏221009)

本文对右基座为投射右模的环,即PS环,进行了讨论,给出了PS环的一个等价刻画.在此基础上,给出了PS环的同调性质,特别地,对PS环与它模掉右基座的商环这两个环的同调维数关系进行了研究.

在本文中,环总是指含有单位元的环,模均指酉模.为了叙述方便,我们将采用[2]中记号表示同调维数.

§1 PS环

定义 1.1 设 M 为环 R 的右 R-模,如果 M 的基座 $\mathrm{Soc}(M_R)$ 为投射右 R-模,则称 M 为PS模.如果环 R 的右基座 $\mathrm{Soc}(R_R)$ 为投射右 R—模,则称 R 为PS环.

右基座为0的模,非奇异模和投射的半单模都是PS模.本原环,右非奇异环,右半素环和右遗传环等等都是PS环.所以PS模和PS环是大量存在的.

引理 1.2 设 R 为PS环,$\mathscr{U}_I$ 为投射右单模表现集,则对 $\mathscr{U}_I$ 中任一元 T 都有 $\mathrm{Hom}_R(T_R R)=0$.

证明 由正合列

$$0\to K\to R_R\to T_R\to 0$$

T 为投射右 R—模,知 $R=K\oplus T'$,$T'_R\overset{R}{\cong}T_R$,所以 $\mathrm{Hom}_R(T,R)\neq 0$.

引理 1.3 设环 R,$S=\mathrm{Soc}(R_R)$,$S=\bigoplus\limits_i H_i$,H_i 是 S 的齐次分量,则

(1) $H_i, H_j=0\quad i\neq j$;

(2) 对 R 的任意一个右理想 I,$I\cap H_i=I\cdot H_i$ 的充要条件为 H_i 是投射右 R—模;

(3) $H_i^2=H_i$,或者,$H_i^2=0$.

证明 由[1]易知(1)(3)成立.现来证(2).由[1]堆论9.9知,$I\cap H_i=\mathrm{Tr}_I(T_i)$,其中 T_i 是 H_i 中的投射单模.$I\cdot H_i\subset I\cap H_i$,$\mathrm{Tr}_I(T_i)$ 里任单子模 T' 均与 T_iR—模同构,从而 $T'\cdot H_i=T'$,故 $\mathrm{Tr}_I(T_i)\cdot H_i=\mathrm{Tr}_I(T_i)\subset I\cdot H_i$,所以

$$I\cap H_i=\mathrm{Tr}_I(T_i)=I\cdot H_i.$$

反之,由 $H_i^2=H_i$,知 T_i 是投射右 R—模,故 H_i 为投射右 R-模.

定理 1.4 设 R 为环,$S=\mathrm{Soc}(R_R)$,则下述各点等价:

* 1990年2月26日收到.

(1) R 是 PS 环.

(2) $S^2=S$.

(3) 对 S 的每个齐次分量 H_i, R/H_i 是平坦左 R—模.

(4) R/S 是平坦左 R-模.

证明 先证(1)⇔(2)

因为 $S^2=(\oplus H_i)\cdot(\oplus H_i)=\oplus H_i^2$. 由引理 1.3 知,(1)与(2)等价.

(1)⇒(3)

R 为 PS 环,则任 H_i 为投射右 R—模. 由引理 1.3 知,对任意右理想 I, $I\cdot H_i=I\cdot R\cap H_i=I\cap H_i$. 由[2]定理 3.55 知, R/H_i 为平坦左 R—模.

(1)⇒(4)

设 $\mathscr{U}_I$ 为投射右单模的表现集,由[1]推论 9.9 和引理 1.3 即知,

$$I\cap S=\mathrm{Soc}(I_R)=\bigoplus_{T_i\in\mathscr{U}_I}\mathrm{Tr}_I(T_i)\sum I\cdot H_i=\sum I\cdot(\sum H_i)=I\cdot S.$$

由[2]定理 3.55 知, R/S 为平担左 R—模.

(3)⇒(1). 由引理 1.3(2)显然.

(4)⇒(2)

因 R/S 为平担左 R—模,则 $S\cap S=S\cdot R\cap S=S\cdot S=S^2$.

命题 1.5 设 R 为 PS 环,则 M_R 为 PS 模的充要条件为 $M\cdot\mathrm{Soc}(R_R)=\mathrm{Soc}(M_R)$.

证明 充分性. 设 $S=\mathrm{Soc}(R_R)$,由 $M\cdot S=\mathrm{Soc}(M_R)$ 和 $M\cdot S=\sum_{x\in M}xS$,即得 $\mathrm{Soc}(M_R)$. 反之,任单模 $T_i\subset M$,由 M 为 PS 模, T_i 为投射模, $T_i\cdot S=T_i$,故 $M\cdot S\supset\mathrm{Soc}(M_R)\cdot S=\mathrm{Soc}(M_R)$,所以 $M\cdot S=\mathrm{Soc}(M_R)$.

命题 1.6 设 R 为 PS 环, $\overline{R}=R/S$, $S=\mathrm{Soc}(R_R)$ 对任意 $\overline{M}$ 为右 $\overline{R}$—模,则 $\mathrm{Hom}_R(S,\overline{M})=0$, $\mathrm{Hom}_R(\overline{M},S)=0$,

证明 考察正合列

$$0\to K\to F\to\overline{M}\to 0$$

其中 F 为自由右 R—模,由 $S^2=S$ 知, $\mathrm{Soc}(F_R)=FS\subset K$. 由引理 1.2 知, $\overline{M}$ 中不能含有投射右单 R—模,从而 $\mathrm{Hom}_R(S,\overline{M})=0$, $\mathrm{Hom}_R(\overline{M},S)=0$.

§2 R 与 $R/\mathrm{Soc}(R_R)$ 之间的维数关系

这一节中的 R 均指 PS 环, $S=\mathrm{Soc}(R_R)$, $\overline{R}=R/S$.

引理 2.1 设 $\overline{P}$ 为任一个右 $\overline{R}$—模, M 为任一个右 R——模,则

$$\mathrm{Hom}_R(M,\overline{P})\cong\mathrm{Hom}_R(M/MS,\overline{P}).$$

证明 由正合列

$$0\to MS\to M\to M/MS\to 0,\tag{1}$$

用 $\mathrm{Hom}_R(\ \ ,\overline{P})$ 作用并用命题 1.6,即得.

引理 2.2 设 F 为自由右 R—模,则对任意右 $\overline{R}$—模 $\overline{M}$ 有, $\mathrm{Ext}_R^i(F/FS),\overline{M})=0\ (i\geqslant 1)$.

命题 2.3 M 为任意右 R—模, $\overline{N}$ 为任意右 $\overline{R}$—模,则

$$\mathrm{Ext}_R^i(M,\overline{N})=\mathrm{Ext}_R^i(M/MS,\overline{N})=\mathrm{Ext}_{\overline{R}}^i(M/MS,\overline{N})\ (i\geqslant 0).$$

证明 用 $\mathrm{Hom}_R(\ \ ,\overline{N})$ 作用(1)得长正合列，由 MS 为投射右 R—模以及引理 2.1 即得命题前半部分.

再来证后半部分. 我们考虑正合列

$$0 \to \overline{K} \to \overline{F} \to M/MS \to 0,$$

其中 $\overline{F}$ 为自由右 $\overline{R}$—模，用 $\mathrm{Hom}_R(\ \ ,\overline{N})$ 作用上式得

$$\to \mathrm{Ext}^i_R(\overline{F},\overline{N}) \to \mathrm{Ext}^i_R(\overline{K},\overline{N}) \to \mathrm{Ext}^{i+1}_R(M/MS,\overline{N}) \to \mathrm{Ext}^{i+1}_R(\overline{F},\overline{N}) \to 0.$$

由引理 2.1 和引理 2.2 以及对 i 作归纳法易得

$$\mathrm{Ext}^i_R(M/MS,\overline{N}) \cong \mathrm{Ext}^i_R(M/MS,\overline{N})(i=0,1,\cdots).$$

定理 2.4 设 $\overline{M}$ 为右 $\overline{R}$—模，则 $\mathrm{rid}_R(\overline{M})=\mathrm{rid}_R(\overline{M})$.

证明 设 I 为 R 的任一个右理想，由命题 2.3 得

$$\mathrm{Ext}^i_R(R/I,\overline{M}) = \mathrm{Ext}^i_R((R/I)/((R/I)S),\overline{M}) = \mathrm{Ext}^i_R((R/S)/((I+S)/S),\overline{M}).$$

再由[2]引理 9.11 知

$$\mathrm{rid}_R(\overline{M}) = \mathrm{rid}_R(\overline{M})$$

引理 2.5 设 R 为右 Noether 环，M 为有限生成右 R—模，P_a 为右 R—模，则

$$\mathrm{Ext}^i_R(M,\bigoplus_a P_a) \cong \bigoplus_a \mathrm{Ext}^i_R(M,P_a) \quad i=0,1,\cdots.$$

证明 对 i 作归纳. 当 $i=0$ 时，

由[1]p189 练习 6 知命题成立.

归纳假设 $i-1$ 时命题成立，现来看 i 时情形. 由下正合列

$$0 \to K \to F \to M \to 0, \tag{2}$$

其中 F 为有限生成自由右 R—模，R 为 Noether 环，则 K 也是有限生成的右 R—模，用 $\mathrm{Hom}_R(\ \ ,\bigoplus_a P_a)$ 作用(2)式得长正合列

$$\mathrm{Ext}^{i-1}_R(F,\bigoplus_a P_a) \to \mathrm{Ext}^{i-1}_R(K,\bigoplus_a P_a) \to \mathrm{Ext}^i_R(M,\bigoplus_a P_a) \to \mathrm{Ext}^i_R(F,\bigoplus_a P_a).$$

由 F 为自由右 R—模，$i\geqslant 2$ 时

$$\mathrm{Ext}^i_R(M,\bigoplus_a P_a) \cong \mathrm{Ext}^{i-1}_R(K,\bigoplus_a P_a) \cong \bigoplus_a \mathrm{Ext}^i_R(K,P_a) \cong \bigoplus_a \mathrm{Ext}^{i+1}_R(M,P_a).$$

综上所述命题成立.

命题 2.6 设 R 为右 Noether 环且为 PS 环，$S=\mathrm{Sol}(R_R)$，$E_R(S_R)$ 为 S 点在右 R—模里的内射包络，则

1) S 为内射右 R—模，或者，$\mathrm{rid}_R(S)=\mathrm{rid}_R(E_R(S_R)/E_R(S_R)\cdot S)+1$；

2) $rD(R)=\max\{rD(\overline{R}),\mathrm{rid}_R(S_R)\}$.

证明 1) 如果 S 不是内射右 R—模，S 是 $E_R(S_R)$ 的本质右 R—子模，R 为 PS，环 $S=S\cdot S\subset E_R(S_R)\cdot S\subset \mathrm{Soc}(E_R(S_R))$. 故 $S=\mathrm{Soc}_R(E_R(S_R))=E_R(S_R)\cdot S$. 再注意下正合列

$$0 \to S \to E_R(S) \to E_R(S)/E_R(S)\cdot S \to 0.$$

因为 S 不是内射模，有

$$\mathrm{Ext}^{i+1}_R(R/I,S) \cong \mathrm{Ext}^i_R(R/I,E_R(S)/Z_R(S)\cdot S) \cong \mathrm{Ext}^i_R((R/S)/((I+S)/S),E_R(S)/S),$$

其中 I 为 R 的右理想，由[2]引理 9.11 知 1)成立.

2) 由 R 为右 Noether 环，$S=\bigoplus_{i=1}^n T_i$，T_i 为单模，对任右理想 I，有

$$\mathrm{Ext}^i_R((R/I,\bigoplus_{i=1}^n T_i) = \bigoplus_{i=1}^n \mathrm{Ext}^i_R(R/I,T_i).$$

故

$$\mathrm{rid}_R(S) = \max_{i=1,\cdots,n} \{\mathrm{rid}_R(T_i)\}.$$

对任意 M 为右 R—模，由(1)式可得

$$\mathrm{Ext}^i_R(R/I, M\cdot S) \to \mathrm{Ert}^i_R(R/I, M) \to \mathrm{Ert}^i_R(R/I, M/MS) \to \mathrm{Ert}^{i+1}_R(R/I, MS),$$

其中 $MS=\bigoplus\limits_j T'_j$，$T'_j$同构于某个 T_i. 又 $\mathrm{Ext}^i_R(R/I,MS)\cong\bigoplus\limits_j \mathrm{Ext}^i_R(R/I,T'_j)$，$\mathrm{Ext}^i_R(R/I,M/MS)\cong$ $\mathrm{Ext}^i_{\overline{R}}((R/S)/((I+S)/S), M/MS)$，得

$$\mathrm{rid}_R(M) = \max_j\{\mathrm{rid}_R(M/MS), \mathrm{rid}_R(T'_j)\}.$$

所以 2)成立.

引理 2.7.1　设 R 为环，P 是 R 的理想，$R^*=R/P$ 是平担左 R—模，则对任意 M^* 为左 R^*-模有

$$\mathrm{lfd}_R(M^*) = \mathrm{lfd}_{R^*}(M^*).$$

证明　由[1]推论 11.63 知

$$\mathrm{Tor}^{R^*}_n(A_\varphi, M^*) = \mathrm{Tor}^R_n(A, M^*),$$

其中 A 为任意右 R—模，φ 为 R 到 R^* 的自然环同态，$A_\varphi=A\otimes_R R^*=A\otimes_R(R/P)\cong A/AP$，故引理得征.

引理 2.7.2　设 R 为 PS 环，则 $\mathrm{Soc}(R_R\subset\mathrm{Soc}(_RR)$的充要条件是 R 的单右理想 T 的对偶模 $T^*=\mathrm{Hom}_R(T,R)$也是单左理想.

证明　必要性. 由 $\mathrm{Soc}(R_R)\subset\mathrm{Soc}(_RR)$，$R$ 为 PS 环 R 的任一个右单模 T，$T=eR$，e 为幂等元 $T^*=\mathrm{Hom}_R(T,R)\cong eR$，$Re$ 是不可约的，$Re\subset\mathrm{Soc}(_RR)$，则 Re 必是单左模.

充分性. 由 R 为 PS 环，T 为右单理想，则 $T=eR$，e 为幂等元. 因为 $T^*=\mathrm{Hom}_R(T,R)\cong Re$ 为单左 R-模，所以 $\mathrm{Soc}(_RR)$的每个齐次分量 ReR 必含于 $\mathrm{Soc}(_RR)$里，故 $\mathrm{Soc}(R_R)\subset\mathrm{Soc}(_RR)$.

推论 2.7.3　设 R 为 PS 环，且 $\mathrm{Soc}(R_R)\subset\mathrm{Soc}(_RR)$，则 $\mathrm{Soc}(R_R)$也是投射左 R—模.

定理 2.7　设 R 为 PS 环，且 $S=\mathrm{Soc}(R_R)\subset\mathrm{Soc}(_RR)$，$\overline{R}=R/S)$，则.

1)　M 为任意左 R—模，$\mathrm{lfd}_R(M)=\mathrm{lfd}_{\overline{R}}(M/SM)$；

2)　$w=wD(R)=wD(R/S)$.

证明　R 为 PS 环，则 R/S 为平担左 R—模. 由正合列.

$$0\to SM\to_R M\to M/SM\to 0,$$

$SM=\sum\limits_{x\in M}Sx$，从而它为投射半单左 R—模. 故

$$\mathrm{lfd}_R(M) = \mathrm{lfd}_R(M/SM) = \mathrm{lfd}_{\overline{R}}(M/SM).$$

所以 $wD(R)=wD(R/S)$.

推论 2.8　设 R 为本原环，$S=\mathrm{Soc}(R_R)$，则

$$wD(R) = wD(R/S).$$

§3　PSE 环

定义 3.1　设 R 为 PS 环，且 R 的右基座为本质右理想，则称 R 为 PSE 环.

引理 3.2.1　设 R 是环，S 为 R 的右基座，则 R 为 PSE 环的充要条件为 S 的左零化子为零.

证明　由定理 1.3 易得.

命题 3.2 设 R 为 PSE 环，S 为 R 的右基座，M 为任一个右 R-模，P 为投射右 R-模，则

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(M,P) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(MS,P)$$

为 Z一模正合列. 换言之，若 $\mathrm{Hom}_R(M,P)$ 的任两个映射 f 和 g 在 MS 上限制相等，那么 f 和 g 相等.

证明 用 $\mathrm{Hom}_R(\quad,F)$ 作用(1)式，F 为自由右 R一模，则有正合列

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(M/MS,F) \to \mathrm{Hom}_R(M,F) \to \mathrm{Hom}_R(MS,F).$$

设 φ 为 $\mathrm{Hom}_R(M/MS,F)$ 中任一个映射，x 为 M/MS 中任一元，$\varphi(x)\cdot S=\varphi(x,s)=0$，而 R 为 PSE 环，则 $\varphi(x)=0$，从而 $\mathrm{Hom}_R(M/MS,F)=0$，得

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(M,F) \to \mathrm{Hom}_R(MS,F).$$

又 P 是投射右 R一模，则存在 Q 为投射右 R一模使得，$F=P\oplus Q$，F 为自由右 R一模. 由(3)式得

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(M,P) \oplus \mathrm{Hom}_R(M,Q) \to \mathrm{Hom}_R(MS,P) \oplus \mathrm{Hom}_R(MS,Q).$$

故

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(M,P) \to \mathrm{Hom}_R(MS,P).$$

所以 M 到 P 的映射完全由限制在 MS 上的映射所决定.

命题 3.3 设 R 为 PSE 环，则对任意投射右 R一模 P，$\mathrm{Hom}_R(P,P)$ 是 $\mathrm{Hom}_R(PS,PS)$ 的子环，其中 S 为 R 的右基座.

证明 由 P 为投射右 R一模，则 $F=P\oplus Q$，F 为自由右 R一模，

$$\mathrm{Soc}(F_R) = FS = PS \oplus QS,$$

$\mathrm{Soc}(F_R)$ 是 F 的本质子模，则 PS 为 P 的本质子模. 由命题 3.4 得下正合列

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(PS,P) \xrightarrow{v^*} \mathrm{Hom}_R(\mathrm{PS},P)(=\mathrm{Hom}_R(PS,PS). \tag{4}$$

任 f,g 为 $\mathrm{Hom}_R(P,P)$ 中映射，$i^*(f\circ g)=f\circ g\circ i=f\circ(g\circ i)=f\circ(i\circ(g\circ i)=(f\circ i)\circ(g\circ i)=i^*(f)\circ i^*(g)$. 故 i^* 为 $\mathrm{Hom}_R(P,P)$ 环同构于 $\mathrm{Hom}_R(PS,PS)$ 的一个子环.

推论 3.3.1 设 R 为 PSE 环，S 为 R 的右基座，P 为任意投射右 R一模. 则

$$\mathrm{Ext}_R^1(P/PS,P) \subseteq \mathrm{Hom}_R(PS,PS)/\mathrm{Hom}_R(P,P).$$

命题 3.4 设 R 为 PSE 环，则 R 为它右基座齐次分量关于左 R一模的自同态环的直积之子环.

证明 设 S 为 R 的右基座. $S=\oplus H_i$，H_i 为 S 的齐次分量，由命题 3.3 知

$$\mathrm{Hom}_R(R,R) \xrightarrow{i^*} \mathrm{Hom}_R(S,S) \underset{\simeq}{\xrightarrow{\sigma}} \oplus \mathrm{Hom}_R(H_i,\oplus H_i) \underset{\simeq}{\xrightarrow{\pi}} \prod \mathrm{Hom}_R(H_i,H_i),$$

其中 i^* 为环单同态，σ 为群同构，π 也为群同构，易验证 $\pi\sigma$ 为环同构，故 $\mathrm{Hom}_R(R,R)$ 环同构于 $\Pi\mathrm{Hom}_R(H_i,H_i)$ 的子环.

命题 3.5 设 R 为 PSE 环，S 为 R 的右基座 $\overline{R}=R/S$，则下述两点等价.

1) $\mathrm{rpd}_R(\overline{M})=\mathrm{rpd}_{\overline{R}}(\overline{M})+1$ 其中 $\overline{M}$ 为任意右 $\overline{R}$一模.

2) 如果对任意自由右 R一模 F，$FS\subset N\subset F$，N 是投射右 R一模，则 N/NS 是 F/FS 的直和分量.

证明 2)⇒1). 由[2]定理 9.32 知

$$\mathrm{rpd}_R(\overline{M}) \leqslant \mathrm{rpd}_{\overline{R}}\overline{M} + \mathrm{rpd}_R(\overline{R}), \tag{5}$$

当且仅当 $\mathrm{rpd}_{\overline{R}}(\overline{M})\leqslant 1$ 时等式成立. 因为 R 为 PSE 环，则 $\mathrm{rpd}_R\overline{R}=1$. 当 $\mathrm{rpd}_{\overline{R}}(\overline{M})=0$ 时，若 $\mathrm{rpd}_R\overline{M}=0$，则 $\overline{M}\oplus N=F$，F 为自由右 R一模，$\mathrm{Soc}(F_R)=FS=NS\oplus\overline{M}S=MS$，$S$ 为 R 的本质右

理想，FS 必为 F 的本质右子模，故 $\overline{M}=0$，所以当 $\mathrm{rpd}_R(\overline{M})=0$，$\overline{M}\neq 0$ 时，$\mathrm{rpd}_R\overline{M}=1$.

本命题之关键要证当 $\mathrm{rpd}_R(\overline{M})=1$ 时，$\mathrm{rpd}_R\overline{M}=2$.

由(5)式，这也等价于证当 $\mathrm{rpd}_R\overline{M}=1$ 时，$\mathrm{pd}_{\overline{R}}\overline{M}=0$. 设 $\mathrm{rpd}_R(\overline{M})=1$，有下正合列

$$0\to N\to F\to \overline{M}\to 0, \tag{6}$$

其中 F 为自由右 R—模，则 N 为投射右 R—模，$FS\subset N$，$FS=NS$，由(6)即得正合列

$$0\to N/FS\to F/FS\to \overline{M}\to 0. \tag{7}$$

由条件 2)得，$F/FS\cong N/FS\oplus\overline{M}$，故条件 1)成立.

1)⇒2). 由上证明和(6)式与(7)式即得.

推论 3.5.1 设环 R 为 PSE 环，如果 R 满足命题 3.5 的条件 2)，则 $rD(R)=rD(R/S)+1$.

证明 由命题 3.5 和(1)式可得.

推论 3.5.2 设 R 为基座非零本原环，如果 R 满足命题 3.5 条件 2)，那么.

$$rD(R)=rD(R/S)+1$$

作者对周伯埙教授、佟文廷教授的指导表示衷心的感谢.

参考文献

[1]Anderson, F. W. and Fuller, K. R., *Rings and Categories of Modules*, Springer—Verlag Berlin and New York, 1974.
[2]J. J. Rotman, *An Introduction to Homological Algebra*, Academic Press New York San Francosco Landon, 1979.
[3]K. R. Gooderl, *Ring Theory—nonsingular rings and modules*, New York and Basel, 1976.
[4]R. Gordon, *Rings in which minimal left ideals are projective*, Pacific J. Math. 31(1969)679—692.
[5]W. K. Nicholson and J. F. Watters, *Rings with projective socle*, American Math. Society, 102(1988)443—450.
[6]J. N. Manocha, *On rings with essential socle*, Communication in Algebra, 4(11)1077—1088(1976).

Homological Properties of PS-Rings

Yue Qin
(Dept. of Math., Xuzhou Teachers' College, Jiangsu, China)

Abstract

Let R be a ring, $S=\mathrm{Soc}(R_R)$. R is called a PS-ring if S_R is projective. In this paper, we will give a characterization of the PS-rings by showing the following results:

Theorem 1.4 The following statements are equivalent for a ring R:

(1) R is a PS-ring;

(2) $S=S$;

(3) For every homogenous component H_i of S_R, R/H_i is a flat left R—module;

(4) R/S is a flat left R—module.

Theorem 2.4 Let R be a PS-ring, $\bar{R}=R/S$, and $\bar{M}$ a right $\bar{R}$—module. Then $\mathrm{rid}_R(\bar{M}=\mathrm{rid}_{\bar{R}}(\bar{M})$.

Corollary 2.8 Let R be a primitive ring. Then $\mathrm{WD}(R)=\mathrm{WD}(R/S)$.