第12卷第1期 数学研究与评论 Vol. 12 No. 1
1992年2月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Feb. 1992

关于判断矩阵的一致性问题*

胡毓达 陆晋奎**
(上海交通大学应用数学系,200030)

摘 要

本文讨论了层次分析法中判断矩阵的一致性问题. 同时,给出一个寻求使判断矩阵按任意精度要求达到任意满意一致性的方法.

§1 引 言

在层次分析法中,由决策者的比较判断所作出的 n 阶判断矩阵 $A=(a_{ij})$ 一般不具有完全一致性,即它的最大特征值 λ_{max} 一般不等于 n. 对此,T. L. Saaty 提出下述方法对判断矩阵进行一致性检验:当随机一致性比率 $CR=CI/RI<0.1$ 时,即当判断矩阵 A 的最大特征值 λ_{max} 与矩阵 A 的阶数 n 之差小于 $0.1(n-1)RI$ 时,就可以认为判断矩阵具有满意一致性[1].

由于在 Saaty 的对 CR 检验的方法中,平均随机一致性指标 RI,是用随机方法构造 500 个同阶样本矩阵,计算出每个样本矩阵的一致性指标 $CI=\lambda_{max}-n/(n-1)$ 的值,然后平均得到的. 因此,用这种随机抽样方法,所得到的样本矩阵具有完全一致性的概率是极小的. 例如,容易推知:当 $n=3$ 时,它仅为 $\frac{45}{17^3}\approx 0.01$;当 $n=4$ 时,它约仅为 0.004. 但是,由决策者作出的判断矩阵只是样本空间中的一小部分,而且一般总已具有某种程度的一致性. 所以,采用由随机方法求得的 RI 值作为标准,来确定随机一致性比率 CR 的值,就缺乏足够的依据. 此外,正如有些作者所指出的:用 0.1 作为一致性检验的临界值是相当粗略的,很难说有什么客观标准[2].

在多目标最优化研究中,若采用判断矩阵法由判断矩阵的最大特征值 λ_{max} 所对应的特征向量来确定权系数[3],一般地,要求所作出的判断矩阵仅具有满意一致性是不够的,而应该要求 λ_{max} 按任意精度接近于判断矩阵的阶数 n,由此可见,寻求一个具有一定精度要求的任意满意一致性的判断矩阵,是十分重要的. 这是用 Saaty 的对 CR 检验的方法所无法解决的.

本文分析了有关判断矩阵的一致性问题. 在这一基础上,给出一个由分析者求解和决策者修正判断交替进行的寻求判断矩阵的交互方法. 此法可使最后得到的判断矩阵达到按任意精度要求接近完全一致性,即任意满意一致性的要求.

§2 关于一致性的分析

* 1990年2月8日收到.

** 上海交通大学应用数学系国内访问学者,上海轻工专科学校教师.

我们知道，关于 n 阶正矩阵 $A=(a_{ij})$，若对所有的 $i,j,k\in I=\{1,2,\cdots,n\}$ 满足 $a_{ij}=a_{ik}/a_{jk}$，则称 A 是具有完全一致性的. 如所周知，具有完全一致性的 n 阶正矩阵 A 的最大特征值 λ_{max} 等于 n，并且这时 A 的第一行均为任意指定的一行的正数倍.

一个 n 阶判断矩阵 A 是正互反矩阵，即对所有的 $i,j\in I$，判断数 a_{ij} 满足：$a_{ij}>0, a_{ii}=1, a_{ij}=\frac{1}{a_{ji}}(i\neq j)$. 设 A 的最大特征值 λ_{max} 对应的正特征向量的 $W=(w_1,w_2,\cdots,,w_n)^T$，若记

$$a_{ij}=\frac{w_i}{w_j}\varepsilon_{ij},i,j\in I,$$

则当所有的 $\varepsilon_{ij}=1$ 时 A 是具有完全一致性的.

显然，作出一个 n 阶判断矩阵需要进行 $n(n-1)/2$ 次比较判断. 如果假定每一次判断相互独立，并且每一次判断正确的概率为 p，则 $n(n-1)/2$ 次判断出现 K 次正确的概率为

$$C^K_{n(n-1)/2}(p)^K(1-p)^{\frac{n(n-1)}{2}-K}.$$

由此式可容易算出，作一个 4 阶判断矩阵，若 $p=0.9$，则 6 次比较判断全部正确的概率为 0.5314(若 $p=0.7$ 时则为 0.1176)；作一个 10 阶判断矩阵，即使 $p=0.9$ 时，45 次比较判断全部正确的概率也仅为 0.0087. 据此可知，当 n 较大时，所有的比较判断正确几乎是不可能发生的. 因此由决策者一次作出的判断矩阵一般是难于达到完全一致性要求的.

在 Saaty 的层次分析法中，出于心理学的要求，规定判断数用 1 — 9 标度，而对标度的这一限制，有时也是造成判断矩阵不具有完全一致性的原因.

例　分析 7 国财力，得到判断矩阵如表 1[4]

表　1

	美	苏	中	法	英	日本	西德
美	1	4	9	6	6	5	5
苏	$\frac{1}{4}$	1	7	5	5	3	4
中	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{7}$	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{5}$
法	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	5	1	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
英	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	5	1	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
日本	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$	7	3	3	1	2
西德	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	5	3	3	$\frac{1}{2}$	1

从此判断矩阵的前面几行来看，日本的财力仅略高于西德的财力. 由此可见 $a_{67}=2$ 明显偏大. 但由于 1 — 9 标度的限制，a_{67} 已无法取 1 到 2 之间的数. 如果利用矩阵的初等行变换把判断矩阵第 1 列上的判断数全部变为 1，观察第 1 行是否是任意指定一行的正数倍，可发现 $a_{13}=9$ 明显偏小. 但在 1—9 标度内，已不存在比 9 大的数.

§3 两个定理

为了修正判断矩阵使之更趋于完全一致性，我们给出两个定理.

定理 1[2] 设 n 阶正互反矩阵 $A=(a_{ij})$ 的最大特征值 λ_{max} 对应的正特征向量为 $W=(w_1, w_2,\cdots,w_n)^T, a_{ij}=\frac{w_i}{w_j}\varepsilon_{ij}$, $(\varepsilon_{ij}>0, i,j\in I)$，则

$$CI=\frac{\lambda_{max}-n}{n-1}=\frac{1}{n(n-1)}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(\varepsilon_{ij}+\frac{1}{\varepsilon_{ij}}-2).$$

证明 见[2]. □

设对判断矩阵 $A=(\frac{w_i}{w_j}\varepsilon_{ij})$ 中的 ε_{rs} 和 $\varepsilon_{sr}(s,r\in I)$ 进行修正得到矩阵 $A'=(\frac{w_i}{w_j}\varepsilon'_{ij})$，使满足条件：

$$\text{(S)}\qquad\begin{cases}1\leqslant\varepsilon'_{rs}<\varepsilon_{rs}, \text{当 } \varepsilon_{rs}>1 \text{ 时},\\ 0<\varepsilon_{rs}<\varepsilon'_{rs}\leqslant 1,, \text{当 } \varepsilon_{rs}<1 \text{ 时},\\ \varepsilon'_{sr}=1/\varepsilon'_{rs},\\ \varepsilon'_{ij}=\varepsilon_{ij}, \text{对其余的 } i,j\in I.\end{cases}$$

我们有如下的定理.

定理 2 将 n 阶判断矩阵 A 按条件(S)修正为矩阵 A'，则 A' 是一个正互反矩阵，并且

$$n\leqslant\lambda'_{max}<\lambda_{max}$$

其中 λ'_{max} 是矩阵 A' 的最大正特征值.

证明 因为 A' 是按条件(S)构成的，故为正互反矩阵.

由于函数 $f(x)=x+\frac{1}{x}$，当 $x>1$ 时单调增加，当 $0<x<1$ 时单调减少，所以 ε'_{rs} 必满足不等式

$$\varepsilon'_{rs}+\frac{1}{\varepsilon'_{rs}}<\varepsilon_{rs}+\frac{1}{\varepsilon_{rs}}.$$

又因为对任何 $\varepsilon_{ij}>0$，必有

$$\varepsilon_{ij}+\frac{1}{\varepsilon_{ij}}\geqslant 2.$$

所以有定理 1 即可推出 $n\leqslant\lambda'_{max}<\lambda_{max}$. □

根据定理 1 和定理 2，我们可以任意给定正数 ε，通过分析者求解和决策者修正，逐步调整判断矩阵使其最大特征 λ_{max} 与 n 之差小于 ε.

§4 修正原则和方法

首先，我们给出修正判断矩阵的几个原则：

(1)修正后的判断矩阵 $A'=(a'_{ij})$ 的第 1 行与判断矩阵 $A=(a_{ij})$ 相比，应该更接近于是其余指定的任意一行的正数倍. 为此，可用矩阵的初等行变换把判断矩阵 A 的第 1 列上的元素全部变为 1. 观察任一行上的元素与第 1 行的相应元素是否接近相等. 对偏离最大的 a_{ij}，根据决策者的判断确定修正 a'_{ij}(如果必要，可超出 1 — 9 标度修正).

(2) 在确定修正值 $a'_{ij}=\frac{w_i}{w_j}\varepsilon'_{ij}$ 时，要求 ε'_{ij} 比 ε_{ij} 更接近于1. 为此，可选取偏离1最大的某一对 ε_{rs} 和 ε_{sr}，由决策者选取 ε'_{rs}，使 ε'_{rs} 满足条件(S). 然后，由式 $a'_{rs}=\frac{w_r}{w_s}\varepsilon'_{rs}$ 确定出 a_{rs} 的修正值 a'_{rs}(a_{sr} 的修正值 a'_{sr} 等于 $1/a'_{rs}$).

(3) 修正判断矩阵 A 时不能出现新的不正确判断. 这就要求每一次被修正的 a_{ij} 和 a_{ji} 的个数不宜过多，一般以1到3对为宜.

(4) 应该根据具体问题的要求选取允许误差 ε，特别是若用于层次分析法时，ε 可取得大些. 一般地，只要经过几次修正，当特征向量的变化不足引起排序的变化时即可停止.

下面给出寻求具有任意满意一致性判断矩阵的方法.

方法步骤

第1步　给定初始判断矩阵 $A=(a_{ij})$，允许误差 $\varepsilon>0$.

第2步　算出 A 的最大特征值 λ_{max}. 若 $\lambda_{max}=n$，则输出 A. 否则，进行第3步.

第3步　令 $a^\circ_{ij}:=a_{ij}, A^\circ:=A, \lambda'_{max}:=\lambda_{max}$. 算出 A° 对应于 λ°_{max} 的特征向量 W°，计算 $\varepsilon^\circ_{ij}=\frac{w^\circ_j}{w^\circ_i}a^\circ_{ij}$. 令 $K:=0$，进行第4步.

第4步　根据修正原则，对 $A^K=(a^K_{ij})$ 进行修正. 确定修正 a^{K+1}_{ij}，作新矩阵 $A^{K+1}=(a^{K+1}_{ij})$.

第5步　算出 A^{K+1} 的最大特征值 λ^{K+1}_{max}. 若 $|\lambda^{K+1}_{max}-n|<\bar{\varepsilon}$，则输出 A^{K+1}. 否则，令 $K:=K+1$，转第4步.

对于上述方法，我们有如下的收敛定理.

定理3　设 $\{\lambda^K_{max}\}$　$(K=0,1,\cdots)$ 是由上述方法产生的判断矩阵的最大特征值序列；则

(1)　$\{\lambda^K_{max}\}$ 是严格单调下降的；

(2)　$\lim\limits_{k\to\infty}\lambda^K_{max}=n$.

证明　(1)　因为 A^{K+1}　$(K=0,1,\cdots)$ 是按条件(S)由修正 A^K 得到的，根据定理2，有

$$\lambda^{K+1}_{max}<\lambda^K_{max},\quad K=0,1,\cdots.$$

(2)　由于 $A^{K+1}(K=0,1,\cdots)$ 是正互反矩阵，由定理1和定理2可知

$$\lambda^{K+1}_{max}\geqslant n, K=0,1,\cdots.$$

因为序列 $\{\lambda^K_{max}\}$ 严格单调下降，并且下有界，所以有 $\lim\limits_{K\to\infty}\lambda^K_{max}=n$. □

最后举一个例子.

例　取§2例子中给出的判断矩阵为初始判断矩阵，$\varepsilon=0.145$，经过4轮迭代即达到精度要求. 结果见表2(相当于修正值 a^K_{ij} 的修正值 a^K_{ji} 表中未列出).

表 2

K	a_{ij}^K	λ_{max}^K	w^K						
			w_1^K	w_2^K	w_3^K	w_4^K	w_5^K	w_6^K	w_7^K
0	~	7.608	0.427	0.231	0.021	0.053	0.053	0.119	0.095
1	$a_{67}^1 = 1$	7.504	0.4180	0.2320	0.0200	0.0536	0.0536	0.1164	0.1065
2	$a_{12}^2 = 3, a_{13}^2 = 18$	7.392	0.4289	0.2340	0.0175	0.0519	0.0519	0.1127	0.1031
3	$a_{12}^3 = 2, a_{27}^3 = 3$	7.316	0.4113	0.2418	0.0178	0.0528	0.0528	0.1145	0.1091
4	$a_{23}^4 = 10, a_{26}^4 = 2$ $a_{34}^4 = a_{35}^4 = \frac{1}{3}$	7.144	0.4113	0.2402	0.0195	0.0491	0.0491	0.1212	0.1091

参考文献

[1] T. L. Saaty, *The Analytic Hierarchy Process*, McGraw—Hill, New York(1980).

[2] 许树柏,实用决策方法——层次分析法,天津人民出版社(1988).

[3] 胡毓达,实用多目标最优化,上海科学技术出版社(1990).

[4] T. L. Saaty and L. G. Vargas, *The Logic of Priorities, Applications in Business, Energy, Health, Transportation*, Kluwer Nijhoff Publishing(1981).

On Uniformity Problem of Judgment Matrix

Hu Yuda *Lu Jingkui*

(Dept. of Appl. Math., Shanghai Jiao Tong University, Shangha, China)

Abstract

In this paper, we discuss the uniformity problem of judgment matrix for the analytic hierarchy Process and thereby give a method of searching judgment matrix with arbitrary approach to complete uniformity.