第12卷第1期 数学研究与评论 Vol. 12 No. 1
1992年2月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Feb. 1992

关于复射影空间的三维全实极小子流形*

郭孝英　沈一兵
(杭州大学数学系. 310028)

摘　要

本文给出复射影空间中三维紧致全实极小子流形的 Ricci 曲率和数量曲率的某些拼挤定理. 特别是证得:若 M^3 是 CP^3 的紧致全实极小子流形且它的 Ricci 曲率大于 1/6,则 M^3 是全测地的.

一、引　言

设 CP^{n+p} 是复 $n+p$ 维的复射影空间,具有常数全纯截曲率 1 的 Fubini－Study 度量 . M^n 是 CP^{n+p} 中实 n 维的紧致全实极小子流形. 关于 M^n 的 Ricci 曲率和数量曲率的拼挤问题,文献[1]和[2]已得到了较好的结果. 最近,文献[3]指出,Chen－Ogiue 关于数量曲率的拼挤常数并非最佳而还可改进. 本文的目的是,对三维紧致全实极小子流形的 Ricci 曲率和数量曲率,给出新的拼挤常数,它们分别改进了[2]和[3]的相应结果. 具体地说,我们得到了下面的

定理 1　设 M^3 是 CP^3 的三维紧致全实极小子流形,若 M^3 的 Ricci 曲率处处大于 1/6,则 M^3 必是全测地的.

注 1　这个定理改进了文献[2]的拼挤常数 3/16,并且正如文献[2]的注 4 所指出,对于三维全实子流形 M^3,当它的 Ricci 曲率为正时,"M^3 具有平行平均曲率向量场"等价于 M^3 的极小性.

定理 2　设 M^3 是 CP^3 的三维紧致全实极小子流形,若 M^3 的数量曲率处处大于 5/6,则 M^3 是全测地的.

注 2　上述定理改进了文献[3]的拼挤常数$\sqrt{3}/2$.

此外,对于 $CP^{3+p}(p\geqslant1)$ 中的三维紧致全实子流形,我们也给出了类似的结果.

本文中若无特殊说明,所涉流形都是连通光滑的. 指标的取值范围约定如下:

$$i,j,k,\cdots=1,2,3;$$
$$\alpha,\beta=4,\cdots,3+p,1^*,2^*,\cdots,(3+p)^*.$$

二、基本公式

本节给出某些记号和基本公式,详细可参考文献[3].

设 CP^{3+p} 是复 $3+p$ 维的复射影空间,具有常数全纯截曲率 1 的 Fubini－Study 度量以及复结构 J,M^3 是 CP^{3+p} 中实三维的紧致全实极小子流形. 在 CP^{3+p} 中选取局部　正标架场 e_1,

* 1990 年 2 月 8 日收到. 国家自然科学基金资助的项目.

$\cdots, e_{3+p}, e_{1^*}=Je_1, \cdots, e_{(3+p)^*}=Je_{3+p}$，使得当它们限制在 M^3 上时，向量 e_1, e_2, e_3 与 M^3 相切. 于是，M^3 在 CP^{3+p} 中的第二基本形式为

$$\sigma = \sum_{\alpha,i,j} h_{ij}^{\alpha}\omega^i \otimes \omega^j \otimes e_{\alpha}. \tag{2.1}$$

它的模长平方是 $\|\sigma^2\| = \sum_{\alpha,i,j}(h_{ij}^{\alpha})^2$.

令 $UM \to M^3$ 是 M^3 上的单位切丛，定义函数 $f: UM \to R$ 为

$$f(u) = \|\sigma(u,u)\|^2 = \sum_{\alpha}\left(\sum_{i,j} h_{ij}^{\alpha}u^i u^j\right)^2 \qquad \forall\, u \in UM. \tag{2.2}$$

因为 UM 是紧致的，故函数 f 必有某点 $x_0 \in M^3$ 的某个向量 $v \in M_{x_0}$ 处达到极大值 $f(v) = \|\sigma(v,v)\|^2(x_0)$. 在点 x_0 取 $e_1 = v$ 并置

$$b_{ij} = \sum_{\alpha} h_{11}^{\alpha} h_{ij}^{\alpha}, \tag{2.3}$$

则在点 x_0 有(见[3])

$$f(v) = b_{11} = \max_{u\in UM}\{\|\sigma(u,u)\|^2\}, \tag{2.4}$$

$$b_{ij} = 0 \qquad (i \neq j), \tag{2.5}$$

$$2\sum_{\alpha}(h_{ij}^{\alpha})^2 + b_{jj} - f(v) \leqslant 0 \qquad (j \neq 1), \tag{2.6}$$

$$0 \geqslant \sum_{i}(b_{ii}R_{i11i} + b_{11}R_{1i1i}) + \sum_{\alpha,\beta,i} h_{11}^{\alpha} h_{1i}^{\beta} R_{\beta\alpha 1i}, \tag{2.7}$$

其中 R_{ijkl} 和 $R_{\alpha\beta kj}$ 分别表示 M^3 的切丛和法丛上的曲率张量.

M^3 的 Gauss 方程是[1]

$$R_{ijkl} = \frac{1}{4}(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}) + \sum_{\alpha}(h_{ik}^{\alpha}h_{jl}^{\alpha} - h_{il}^{\alpha}h_{jk}^{\alpha}), \tag{2.8}$$

由此得

$$R_{ij} = \frac{1}{2}\delta_{ij} - \sum_{\alpha,k} h_{ik}^{\alpha} h_{jk}^{\alpha}, \tag{2.9}$$

$$\rho = \frac{3}{2} - \|\sigma\|^2, \tag{2.10}$$

其中 R_{ij} 和 ρ 分别表示 M^3 的 Ricci 张量和数量曲率.

当 $p=0$ 时，即对于 CP^3 中的 M^3，我们还有[1]

$$h_{ij}^{k^*} = h_{kj}^{i^*} = h_{ik}^{j^*}, \tag{2.11}$$

$$R_{k^*l^*ij} = R_{klij}. \tag{2.12}$$

三、定理的证明

设 $x_0 \in M^3$ 和 $v = e_1 \in UM_{x_0}$ 使(2.2)定义的函数 f 达到极大值. 以下的讨论均在点 x_0 进行. 由(2.3)和(2.4)易见

$$(b_{jj})^2 \leqslant \left(\sum_{\alpha}(h_{11}^{\alpha})^2\right)\left(\sum_{\alpha}(h_{jj}^{\alpha})^2\right) \leqslant (b_{11})^2. \tag{3.1}$$

由此及三维极小性，便有

$$b_{22}\leqslant 0, b_{33}\leqslant 0, \sum_{j\neq 1}(b_{jj})^2\leqslant \sum_{j\neq 1}(b_{jj})^2=(b_{11})^2. \tag{3.2}$$

把(2.8)和(2.12)代入(2.7)，利用(2.3)和(2.11)，可得

$$0\geqslant f(v)+2\sum_{\substack{k\\ j\neq 1}}b_{jj}(h_{1j}^{k^*})^2-2f(v)\sum_{\substack{k\\ j\neq 1}}(h_{1j}^{k^*})^2-\sum_{j\neq 1}(b_{jj})^2-f(v)b_{11}. \tag{3.3}$$

这是我们要用的基本不等式.

定理 1 的证明 由(2.9)和(2.3)，有

$$-\sum_{\substack{k\\ j\neq 1}}(h_{1j}^{k^*})^2=R_{11}-\frac{1}{2}+b_{11} \tag{3.4}$$

将它代入(3.3)右边的第三项，注意到(3.2)，便得

$$0\geqslant 2f(v)R_{11}+2\sum_{\substack{k\\ j\neq 1}}b_{jj}(h_{1j}^{k^*})^2. \tag{3.5}$$

由(2.6)和(3.2)，有

$$\sum_{\substack{k\\ j\neq 1}}b_{jj}(h_{1j}^{k^*})^2\geqslant\frac{1}{2}\sum_{j\neq 1}b_{jj}(b_{11}-b_{jj})=-\frac{1}{2}\sum_{i}(b_{ii})^2. \tag{3.6}$$

另一方面，由(3.1)和(3.4)，又有

$$\sum_{\substack{k\\ j\neq 1}}b_{jj}(h_{1j}^{k^*})^2\geqslant -f(v)\sum_{\substack{k\\ j\neq 1}}(h_{1j}^{k^*})^2=f(v)(R_{11}-\frac{1}{2}+b_{11}). \tag{3.7}$$

把(3.6)和(3.7)分别引入(3.5)，利用(3.2)，便得

$$\begin{aligned}0&\geqslant 2f(v)R_{11}-\frac{1}{2}\sum_{i}(b_{ii})^2+f(v)(R_{11}-\frac{1}{2}+b_{11})\\&=3f(v)R_{11}-\frac{1}{2}f(v)+\frac{1}{2}[(b_{11})^2-\sum_{j\neq 1}(b_{jj})^2]\\&\geqslant 3f(v)(R_{11}-\frac{1}{6}).\end{aligned} \tag{3.8}$$

这样，当 M^3 的 Ricci 曲率处处大于 1/6 时，(3.8)意味着 $f(v)=0$，即函数 $f\equiv 0$. 因此，M^3 是全测地的. 定理 1 证毕.

定理 2 的证明 我们从(3.3)出发，把(3.6)和(3.7)分别引入(3.3)右边的第二项，注意到(3.1)，便得

$$\begin{aligned}0&\geqslant f(v)-\frac{1}{2}\sum_{i}(b_{ii})^2-f(v)\sum_{\substack{k\\ j\neq 1}}(h_{1j}^{k^*})^2-2f(v)\sum_{\substack{k\\ j\neq 1}}(h_{1j}^{k^*})^2-\sum_{j\neq 1}(b_{jj})^2-f(v)b_{11}\\&\geqslant\frac{3}{2}f(v)[\frac{2}{3}-2\sum_{\substack{k\\ j\neq 1}}(h_{1j}^{k^*})^2-\sum_{k,i}(h_{ii}^{k^*})^2]\\&\geqslant\frac{3}{2}f(v)[\frac{2}{3}-\|\sigma\|^2(x_0)].\end{aligned} \tag{3.9}$$

这样，当 M^3 的数量曲率 $\rho>5/6$ 时，即 $\|\sigma\|^2<\frac{2}{3}$，(3.9)意味着 $f(v)=0$. 因此，M^3 是全测地的. 定理 2 证毕.

四、$p\geqslant 1$ 的情况

本节考虑 $CP^{3+p}(p\geqslant 1)$中的三维紧致全实极小子流形 M^3. 这时(2.12)不能成立，代替它的

是 M^3 的 Ricci 方程[1].

$$R_{\alpha\beta ij}=\frac{1}{4}(J_{\alpha i}J_{\beta j}-J_{\alpha j}J_{\beta i})+\sum_{k}(h^{\alpha}_{ik}h^{\beta}_{jk}-h^{\alpha}_{jk}h^{\beta}_{ik}). \tag{4.1}$$

把(2.8)和(4.1)代入(2.7),利用(2.3),可得

$$0\geqslant\frac{3}{2}f(v)+2\sum_{\substack{\alpha\\ j\neq 1}}b_{jj}(h^{\alpha}_{1j})^2-2f(v)\sum_{\substack{\alpha\\ j\neq 1}}(h^{\alpha}_{ij})^2-\sum_{j\neq 1}(b_{jj})^2-f(v)b_{11}. \tag{4.2}$$

于是,仿照上节定理 1 和定理 2 的同样论证(从略),我们就有

定理 3 设 M^3 是 $CP^{3+p}(p\geqslant 1)$ 的紧致全实极小子流形,当下列任一条件满足时,M^3 必是全测地的:

(i) M^3 的 Ricci 曲率处处大于 1/4;

或

(ii) M^3 的数量曲率处处大于 1.

注 3 条件(i)表明,文献[4]的定理 2 对于 $n=3$ 也成立. 条件(ii)改进了文献[3]中定理 2 的相应结果. 对于欧氏球面中三维紧致极小子流形的类似问题可参阅文献[5]

参考文献

[1]Chen, B. Y. & Ogiue, K, Trans A. M. S., 193(1974), 257—266.

[2]Montiel, S., Ros, A. & Urbano, F., Math. Z., 191(1986), 537—548.

[3]Shen, Y. B., *Scalar curvature for totally real minimal submanifolds*, to appear.

[4]沈一兵,科学通报,28(1983),131—133.

[5]Shen, Y. B., *Curvature pinching for 3—dimensional minimal submanifolds in a sphere*, Proc. AMS, 1991.

On 3-Dimensional Totally Real Minimal Submanifolds in a Complex Projective Space

Guo Xiaoying *Shen Yibing*

(Dept. of Math., Hangzhou University, Hangzhou, China)

Abstract

Let CP^{3+p} be a complex $(3+p)$−dimensional complex projective space with the Fubini-Study metric of constant homomorphic sectional curvature 1, and M^3 be a real 3−dimensional totally compact and real minimal submanifold in CP^{3+p}. In this paper, some pinching theorems for the Ricci curvature and the scalar curvature of M^3 in CP^{3+p} are given. It is shown that if the Ricci curvature of M^3 in CP^3 is larger than 1/6, then M^3 is totally geodesic in CP^3.