图 $C_n\times P_2$ 的优美性*

杨燕昌 王广选
(北京工业大学,100022) (北京密云电机厂)

在文[1]中,我们证明了图 $C_{4k}\times P_m$ 的优美性,并且提出了一般地 $C_n\times P_m$ 是优美图的猜想,在本文中我们证明了图 $C_n\times P_2$ 的优美性.

定理 图 $C_n\times P_2$ 是优美图.

我们将图 $G=C_n\times P_2$ 的 $2n$ 个顶点分别记为 u_i, v_i, $i=1,2,\cdots,n$, 其位置如图1所示.

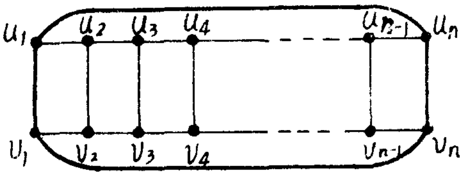

图1 图 $C_n\times P_2$ 的各项点的位置

首先给出两种难以归属到一般情况的,$n=3$,$n=5$ 情况各顶点的优美值,见图2. 至于 $n=4$ 的情况,文[1]已经给出,这儿就不给出了.

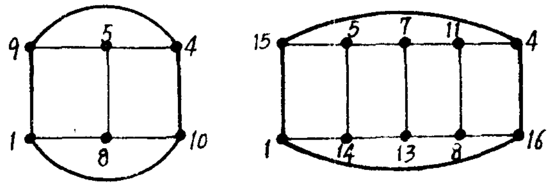

图2 a) $C_3\times P_2$ b) $C_5\times P_2$

一般地,我们先分成奇偶两种情况分别给出优美标号. 对 n 是偶数时,又分别以 $n\equiv 0\bmod 6$, $m\equiv 2\bmod 6$, $n\equiv 4\bmod 6$ 三种情况给出优美标号. 对 n 是奇数时,又分别以 $n\equiv 1\bmod 4$, $n\equiv 3\bmod 4$ 两种情况给出优美标号. 这样我们就可以分别写成5个引理,其中 $l(v)$ 代表顶点 v 的优美标号,$l(u,v)=|(l(u)-l(v)|$ 代表顶点 u,v 之间的边 uv 上的优美值.

引理1 设 $n\equiv 0\bmod 6$,我们给出各个顶点的优美标号为:

$$l(u_{2i-1})=2i-1,\qquad i=1,2,\cdots,\frac{n}{2},$$

$$l(u_{2i})=\begin{cases}\frac{3}{2}n+2-i, & i=1,2,\cdots,\frac{n}{6}\\ \frac{3}{2}n+1-i, & i=\frac{n}{6}+1,\frac{n}{6}+2,\cdots,\frac{n}{2}\end{cases},$$

* 1990年1月10日收到. 1991年11月2日收到修改稿.

$$l(v_{2i-1})=\begin{cases}3n+2-i, i=1,2,\cdots,\frac{n}{3},\\ 3n+1-i, \quad i=\frac{n}{3}+1,\frac{n}{2}+2,\cdots,\frac{n}{2}\end{cases},$$

$$l(v_{2i})=2i, \quad i=1,2,\cdots,\frac{n}{2},$$

则图 $G=C_n\times P_2$ 在此标号下是优美图.

证明 首先说明顶点标号是单射,即不同顶点的标号值不同,显然 $l(u_{2i-1}),l(v_{2i}),i=1,2,\cdots,\frac{n}{2}$ 之间彼此不同. 又 $l(u_{2i}),i=1,2,\cdots,\frac{n}{2}$ 之间彼此不同. 因为 $\min(l(u_{2i}))=\frac{3n}{2}+1-\frac{n}{2}=n+1$, $\max\limits_i(l(u_{2i-1}),l(v_{2i}))=n$, 于是 $\max\limits_i(l(2(u_{2i-1}),l(v_{2i}))<(\min\limits_i)l(u_{2i}))$, 这就说明 $l(u_{2i})$ 与 $l(u_{2i-1}),l(v_{2i}),i=1,2,\cdots,\frac{n}{2}$ 之间必定彼此不同. 又 $l(v_{2i-1}),i=1,2,\cdots,\frac{n}{2}$ 之间彼此不同. 因为 $\max\limits_i(l(u_{2i}))=\frac{3}{2}n+1$, $\min\limits_i(l(v_{2i-1}))=3n+1-\frac{n}{2}=\frac{5}{2}n+1$, 于是 $\max\limits_i(l(u_{2i}))<\min\limits_i(l(v_{2i-1}))$. 这就说明 $l(v_{2i-1})$ 与 $l(u_{2i-1}),l(u_{2i}),l(v_{2i})$ 之间必定彼此不同,故知顶点标号是单射的.

让我们利用公式 $l(uv)=|l(u)-l(v)|$ 直接计算各边的标号值为

$$l(u_{2i-1}v_{2i-1})=\begin{cases}3n+3-3i, & i=1,2,\cdots,\frac{n}{3}\\ 3n+2-3i, & i=\frac{n}{3}+1,\frac{n}{3}+2,\frac{n}{6}+2,\cdots,\frac{n}{2}\end{cases},$$

$$l(v_1v_n)=2n+1,$$

$$l(u_{2i-1}v_{2i})=\begin{cases}3n+2-3i, & i=1,2,\cdots,\frac{n}{3}\\ 3n+1-3i, & i=\frac{n}{3}+1,\frac{n}{3}+2,\cdots,\frac{n}{2}\end{cases},$$

$$l(v_{2i}v_{2i+1})=\begin{cases}3n+1-3i, & i=1,2,\cdots,\frac{n}{3}-1\\ 3n-3i, & i=\frac{n}{3},\frac{n}{3}+1,\cdots,\frac{n}{2}-1,\end{cases},$$

$$l(u_{2i-1}u_{2i})=\begin{cases}\frac{3}{2}n+3-3i, & ,\cdots,\frac{n}{6}\\ \frac{3}{2}n+2-3i, & i=\frac{n}{6}+1,\frac{n}{6}+2,\cdots,\frac{n}{2}\end{cases},$$

$$l(u_{2i}u_{2i+1})=\begin{cases}\frac{3}{2}n+1-3i, & i=1,2,\cdots,\frac{n}{6}-1\\ \frac{3}{2}n-3i, & i=\frac{n}{6},\frac{n}{6}+1,\cdots,\frac{n}{2}-1\end{cases},$$

$$l(u_{2i}u_{2i})=\begin{cases}\frac{3}{2}n+2-3i, & ,i=1,2,\cdots,\frac{n}{6}\\ \frac{3}{2}n+1-3i, & i=\frac{n}{6}+1,\frac{n}{6}+2,\cdots,\frac{n}{2}\end{cases},$$

$$l(u_1u_n)=n.$$

综上所述易知 $I=\{l(u,v)\,|\,u,v\in C_n\times P_n\}=\{1,2,3,\cdots,3n-1,3n\}$, 所以 $G=C_n\times P_2$, 当 $n\equiv$

0mod6 时，在此标号下是优美图.

因为 $n\equiv 2\bmod 6$，$n\equiv 4\bmod 6$ 时的证法相同，故只给出优美标号，而省略其证明.

引理 2 设 $n\equiv 2\bmod 6$，我们给出各个顶点的优美标号为：

$$l(u_{2i-1})=2i-1,\ i=1,2,\cdots,\frac{n}{2},$$

$$l(u_{2i})=3n+2-i,\ i=1,2,\cdots,\frac{n}{2}-1,$$

$$l(u_n)=\frac{3}{2}n+4,$$

$$l(v_{2i-1})=\begin{cases}\dfrac{3}{2}n+4-i, & i=1,2,\cdots,\dfrac{n-2}{3}\\[2ex] \dfrac{3}{2}n+1-i, & i=\dfrac{n-2}{3}+1,\dfrac{n-2}{3}+2,\cdots,\dfrac{n}{2}\end{cases},$$

$$l(v_{2i})=2i,\ i=1,2,\cdots,\frac{n}{2}.$$

则图 $G=C_n\times P_2$，在此标号下是优美图.

引理 3 设 $n\equiv 4\bmod 6$，我们给出各个顶点的优美标号为：

$$l(u_{2i-1})=2i-1,\ i=1,2,\cdots,\frac{n}{2},$$

$$l(u_{2i})=\begin{cases}3n+2-i, & i=1,2,\cdots,\dfrac{n}{2}-1\\[2ex] n+1, & i=\dfrac{n}{2}\end{cases},$$

$$l(v_{2i-1})=\begin{cases}\dfrac{3}{2}+5-i, & i=1,2,\cdots,\dfrac{n+8}{6}\\[2ex] \dfrac{3}{2}+4-i, & i=\dfrac{n+8}{6}+1,\dfrac{n+8}{6}+2,\cdots,\dfrac{n-1}{3}\\[2ex] \dfrac{3}{2}n+3-i, & i=\dfrac{n-1}{3}+1,\dfrac{n-1}{3}+2,\cdots,\dfrac{n}{2}\end{cases},$$

$$l(v_{2i})=2i,\qquad i=1,2,\cdots,\frac{n}{2}.$$

则图 $G=C_n\times P_2$ 在此标号下是优美图.

引理 4 设 $n\equiv 1\bmod 4$，我们给出各个顶点的优美标号为：

$$l(u_{2i-1})=\begin{cases}3i+1, & i=1,2,\cdots,\dfrac{n+3}{4}\\[2ex] 3(n-i)+3, & i=\dfrac{n+3}{4}+1,\dfrac{n+3}{4}+2,\cdots,\dfrac{n-3}{2}\end{cases},$$

$$l(u_{2i})=\begin{cases}3(n-i)-1, & i=1,2,\cdots,\dfrac{n-1}{4}\\[2ex] 3i+5, & i=\dfrac{n-1}{4}+1,\dfrac{n-1}{4}+2,\cdots,\dfrac{n-3}{2}\end{cases},$$

$$l(u_{n-2})=\frac{3}{2}(n+3)-6,$$

$$l(u_{n-1})=5,$$

$$l(u_n)=3n,$$

$$l(v_{2i-1})=\begin{cases}3(n-i)+4, & i=1,2,\cdots,\frac{n+3}{4}\\ 3i, & i=\frac{n+3}{4}+1,\frac{n+3}{4}+2,\cdots,\frac{n-3}{2}\end{cases},$$

$$l(v_{2i})=\begin{cases}3i+5, & i=1,2,\cdots,\frac{n-1}{4}\\ 3(n-i)-1, & i=\frac{n-1}{4}+1,\frac{n-1}{4}+2,\cdots,\frac{n-3}{2}\end{cases},$$

$l(v_{n-2})=\frac{3}{2}(n+3)$,

$l(v_{n-1})=3n-1$,

$l(v_n)=1$.

则图 $G=C_n\times P_2$ 在此标号下是优美图.

证明 首先说明顶点的标号是单射. 令

$$I_1=\{l(v_{2i-1})\mid \quad i=\frac{n+3}{4}+1,\frac{n+3}{4}+2,\cdots,\frac{n-3}{2}\}$$
$$=\{3(\frac{n+7}{4}),3(\frac{n+7}{4})+3,\cdots,3(\frac{n-3}{2})\},$$

$$I_2=\{l(u_{2i-1})\mid \quad i=\frac{n+3}{4}+1,\frac{n+3}{4}+2,\cdots,\frac{n-3}{2}\}$$
$$=\{3(\frac{n-1}{2})+9,3(\frac{n-1}{2})+12,\cdots,3(\frac{3n-3}{4})\},$$

且 $l(u_{n-2})=\frac{3(n-1)}{2}$, $l(v_{n-2})=\frac{3(n-1)}{2}+6$, 及 $l(u_n)=3n$. 容易看出以上诸点的标号都是 3 的倍数,且互不相等. 令

$$I_3=\{l(u_{2i-1})\mid \quad i=1,2,\cdots,\frac{n+3}{4}\}=\{3+1,6+1,\cdots,,\frac{3(n+3)}{4}+1\},$$

$$I_4=\{l(v_{2i-1})\mid \quad i=1,2,\cdots,\frac{n+3}{4}\}=\{3(\frac{3n+1}{4})+1,3(\frac{3n+1}{4}+1)+1,\cdots,3n+1\},$$

且 $l(v_n)=1$. 容易看出以上诸标号都是模 3 为 1 的,且互不相等. 令

$$I_5=\{l(v_{2i})\mid \quad i=1,2,\cdots,\frac{n-1}{4}\}$$
$$=\{6+2,9+2,\cdots,3(\frac{n+3}{4})+2\},$$

$$I_6=\{l(u_{2i})\mid i=\frac{n-1}{4}+1,\frac{n-1}{4}+2,\cdots,\frac{n-3}{2}\}$$
$$=\{3(\frac{n+3}{4}+1)+2,3(\frac{n+3}{4}+2)+2,\cdots,3(\frac{n-1}{2}+2\},$$

$$I_7=\{l(v_{2i})\mid i\,i\,] =\frac{n-1}{4}+1,\frac{n-1}{4}+2,\cdots,\frac{n-2}{2}\}$$
$$=\{3(\frac{n-1}{2}+1)+2,3(\frac{n-1}{2}+2)+2,\cdots,3(\frac{3n-7}{4}+2\},$$

$$I_8=\{l(u_{2i})\mid i=1,2,\cdots,\frac{n-1}{4}\}$$
$$=\{3(\frac{3n-3}{2})+2(\frac{3n-3}{2}+1)+2\cdots,3(n-2)+2\},$$

且 $l(u_{n-1})=3+2$, $l(v_{n-1})=3(n-1)+2$. 容易看出以上诸点的标号都是模 3 为 2 的,且互不

相等.

综上述所述,可以知道顶点的标号是单射.

再证边的标号是连续单射. 我们利用公式 $l(uv)=|l(u)-l(v)|$ 直接验算各边的标号为:

$$l(v_iv_{i+1})=\begin{cases}3n-4-3i, & i=1,2,\cdots,\frac{n-1}{2}\\ 3n-4-3i, & i=\frac{n+3}{2},\frac{n+3}{2}+1,\cdots,n-4\end{cases},$$

$l(v_{n-1}v_{n-2})=\frac{3n-11}{2}$, $l(v_{\frac{n+1}{2}}v_{\frac{n+3}{2}})=5$, $l(v_{n-2}v_{n-3})=1$,

$l(v_1v_n)=3n$, $l(v_nv_{n-1})=3n-2$,

$$l(u_iu_{i+1})=\begin{cases}3n-5-3i, & i=1,2,\cdots,\frac{n-1}{2}\\ 3n-5-3i, & i=\frac{n+3}{2},\frac{n+3}{2}+1,\cdots,n-4\end{cases},$$

$l(u_{n-1}u_{n-2})=\frac{3n-13}{2}$, $l(u_{\frac{n+1}{2}}u_{\frac{n+3}{2}})=4$, $l(u_{n-2}u_{n-3})=2$,

$l(u_1u_n)=3n-4$, $l(u_nu_{n-1})=3n-5$,

$l(u_{2i-1}v_{2i-1})=3n+3-6i$, $i=1,2,3,\cdots,\frac{n-1}{2}$,

$l(u_{2i}v_{2i})=3n-6-6i$, $i=1,2,3,\cdots,\frac{n-3}{2}$,

$l(u_{n-1}v_{n-1})=3n-6$, $l(u_nv_n)=3n-1$, $l(u_{n-2}v_{n-2})=3n-6$.

综上所述边集的标号是 $\{1,2,3,4,\cdots,3n\}$. 所以此时图 $G=C_n\times P_2$ 是优美图.

引理 5 设 $n\equiv 3\bmod 4$,我们给出各个项点的优美标号为:

$$l(u_{2i-1})=\begin{cases}3(i-1)+4, & i=1,2,\cdots,\frac{n-3}{4}\\ 3(n-i)+3, & i=\frac{n-3}{4}+1,\frac{n-3}{4}+2,\cdots,\frac{n-3}{4}\end{cases},$$

$$l(u_{2i})=\begin{cases}3(n-i)-1, & i=1,2,\cdots,\frac{n-3}{4}\\ 3i+5 & i=\frac{n-3}{4}+1,\frac{n-3}{4}+2,\cdots,\frac{n-3}{2}\end{cases},$$

$$l(v_{2i-1}=\begin{cases}3(n-i)+4, & i=1,2,\cdots,\frac{n-1}{4}\\ 3i & i=\frac{n-3}{4}+1,\frac{n-3}{4}+2,\cdots,\frac{n-1}{2}\end{cases},$$

$$l(v_{2i})=\begin{cases}3i+5, & i=1,2,\cdots,\frac{n-3}{4}\\ 3(n-i)-1, & i=\frac{n-3}{4}+1,\frac{n-3}{4}+2,\cdots,\frac{n-3}{2}\end{cases},$$

$l(u_{n-1})=5$,

$l(v_{n-1})=3n-1$,

$l(u_n)=3n$,

$l(v_n)=1$.

则图 $G=C_n\times P_2$ 在此标号下是优美图.

因其证法同于引理 4，我们予以省略．最后给出 $n=12,13,14,15,16$ 诸情况按本文方式给定的具体的实例，其规律性则更加一目了然．

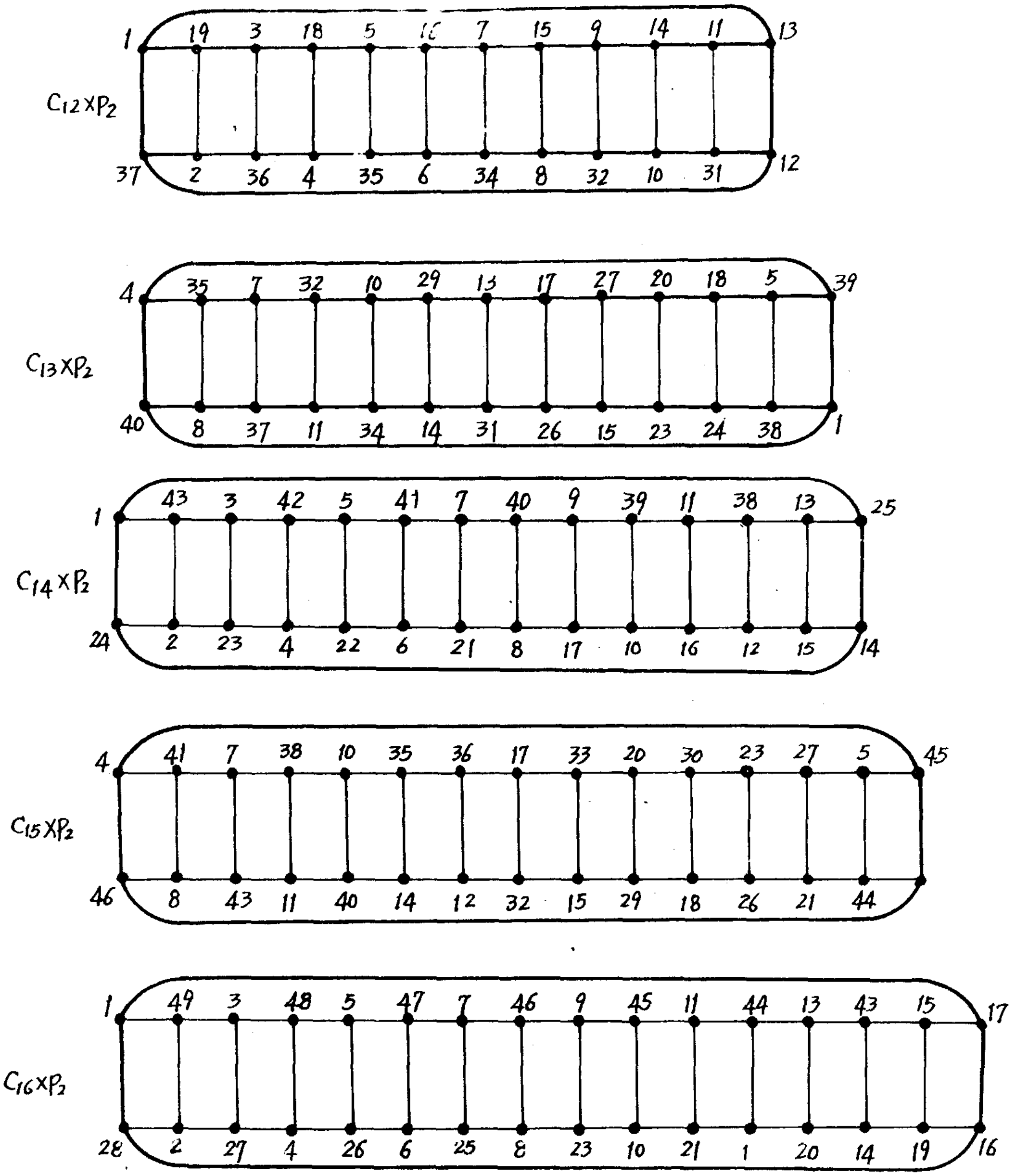

图 3　几个图的优美标号

参考文献

[1]杨燕昌、王广选，关于两业图的优美性．，北京工业大学学报，1985(13卷)3期，pp59—66.