第12卷第2期 数学研究与评论 Vol. 12 No. 2
1992年5月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION May 1992

关于某类带参数λ的四阶非对称微分算子性状之研究*

刘 颖 范
(南京航空学院数学教研室,210016)

摘 要

考虑如下具有振动背景的带参数λ的四阶非对称微分算子A_λ及其一般化$\hat{A}_\lambda$:

$$A_\lambda:(K_{(i,j)},\|\cdot\|_{H^4})\to(A_\lambda K_{(i,j)},\|\cdot\|_{L^2}),0\leqslant i<j\leqslant 3$$

$$\hat{A}_\lambda:(K_{(i,j)},\|\cdot\|_{H^4})\to(A_\lambda K_{(i,j)},\|\cdot\|_{L^2}).$$

(它们的定义在下面0、节给出)

作者在文[1]中详细讨论了A_λ在四种$(i,j)=((0,1),(0,2),(1,3),(2,3))$场合的一一有界性.本文将大大拓展讨论范围,即将文[1]中的先验估计方法与泛函分析的方法结合起来使用,不仅得到了A_λ的一般化$\hat{A}_\lambda$一一有界的结果,还得到了更确切地反映平稳性状的A_λ的正则性结果,特别地,本文还得到反映近似解性状的A_λ的扩张同构及在新拓扑下的同构.

0、一 些 定 义

$$K_{(i,j)}=\{y\in C^4[0,l]\,|\,y^{(i)}_{x=0,l}=y^{(j)}_{x=0,l}=0\},\quad \|y\|^2_{H^4}=\sum_{k=0}^{4}\|y^{(k)}\|^2_{L^2},$$

$$\|y\|^2_{L^2}=\int_0^l|y(x)|^2dx,\quad A_\lambda=\frac{d^4}{dx^4}-N(x)\frac{d}{dx}+N_\lambda(x)I,$$

$$\hat{A}_\lambda=\frac{d^4}{dx^4}+P(x)\frac{d^3}{dx^3}+q(x)\frac{d^2}{dx^2}-N(x)\frac{d}{dx}+N_\lambda(x)I,$$

$$N_\lambda(x)=\lambda^2+\frac{\lambda}{V_0}N(x),\quad P,q,N\in C[0,l],$$

均为实函数,$\lambda\in C$.本文主要讨论依赖于参数λ的算子A_λ的一一有界、正则、同构与扩张同构.

1、A_λ与$\hat{A}_\lambda$的一一有界性之结果

考虑:$\hat{A}_\lambda:(K_{(i,j)},\|\cdot\|_{H^4})\to(A_\lambda K(i,j),\|\cdot\|_{L^2})\subset(L^2(0,l),\|\cdot\|_{L^2})$,并视$A_\lambda$为$\hat{A}_\lambda$之特例.

<1> 对$K_{(0,1)}$的结果

* 1990年4月30日收到.

定理 1 考虑 $\hat{A}_\lambda:(K_{(0,1)},\|\cdot\|_{H^4})\to(A_\lambda K_{(0,1)},\|\cdot\|_{L^2})$，并设 $P(x)\in C^3[0,l]$，$q(x)\in C^2[0,l]$，$N(x)\in C^1[0,l]$，且满足 $\|\frac{3}{2}P'-q\|_c\leqslant 4/l^2$，则当 $\lambda\in\{\lambda\in C|\min\limits_{x\in[0,l]}\mathrm{Re}(N_\lambda+\frac{1}{2}N'-\frac{1}{2}P^{(3)}+\frac{1}{2}q''+\frac{16}{l^4}(1-\frac{l^2}{4}\|\frac{3}{2}P'-q\|_c))>0\}$ 时，$\hat{A}_\lambda$ 是一对一的线性有界算子.

证明 对 $\forall\, y\in K_{(0,1)}$，注意 $y_{x=0,1}=y'_{x=0,l}=0$，有

$$\mathrm{Re}(\hat{A}\lambda y,y)=\|y''\|_{L^2}^2+\int_0^l(\frac{3}{2}P'-q)|y'|^2dx+\int_0^l\mathrm{Re}(N_\lambda+\frac{N'}{2}+\frac{1}{2}P^{(3)}-\frac{1}{2}q'')|y|^2dx.$$

由 $y\in K_{(0,1)}$ 之端点条件有：

$$\|y\|_{L^2}^2\leqslant\frac{l^2}{4}\|y'\|_{L^2}^2,\ \|y'\|_{L^2}^2\leqslant\frac{l^2}{4}\|y''\|_{L^2}^2$$

$$\|y^{(2)}\|_{L^2}^2\leqslant l^2\|y^{(3)}\|_{L^2}^2,\ \|y^{(3)}\|_{L^2}^2\leqslant l^2\|y^{(4)}\|_{L^2}^2,$$

从而可得

$$\mathrm{Re}(\hat{A}_\lambda y,y)\geqslant(1-\frac{l^2}{4}\|\frac{3}{2}P'-q\|_c)\|y''\|_{L^2}^2+\int_0^l\mathrm{Re}(N_\lambda+\frac{1}{2}N'-\frac{1}{2}P^{(3)}+\frac{1}{2}q'')|y|^2dx$$
$$\geqslant\int_0^l\mathrm{Re}(N_\lambda+\frac{1}{2}N'-\frac{1}{2}P^{(3)}+\frac{1}{2}q''+\frac{16}{l^4}(1-\frac{l^2}{4}\|\frac{3}{2}P'-q\|_c))|y|^2dx.$$

(其中第一个不等号用 $\|y'\|_{L^2}^2\leqslant\frac{l^2}{4}\|y''\|_{L^2}^2$，第二个不等式用已知条件及不等式 $\|y''\|_{L^2}^2\geqslant\frac{16}{l^4}\|y\|_{L^2}^2$). 这指出 λ 在已知条件之下，$\hat{A}_\lambda y=0\Rightarrow\|y\|_{L^2}^2=0$，由 $y\in K_{(i,j)}$ 知 $y\equiv 0$. 从而 $\hat{A}_\lambda$ 是一对一，并且在所给拓扑下，显然有

$$\|\hat{A}_\lambda y\|_{L^2}\leqslant M(\lambda,P,q,N)\|y\|_{H^4}$$

从而 $\hat{A}_\lambda:(K_{(i,j)},\|\cdot\|_{H^4})\to(A_\lambda K_{(i,j)},\|\cdot\|_{L^2})$ 是一对一有界. 证毕.

＜2＞ 对 $K_{(0,2)}$，有

定理 2 考虑 $\hat{A}_\lambda:(K_{(0,2)},\|\cdot\|_{H^4})\to(A_\lambda K_{(0,2)},\|\cdot\|_{L^2})$，则

(i) 若 $P(x)\in C^3[0,l]$，$q(x)\in C^2[0,l]$，$N(x)\in C^1[0,l]$，且 $\|\frac{3}{2}P'-q\|_c\leqslant\frac{1}{l^2}$，$P_{x=0,l}=0$，则当 $\lambda\in\{\lambda\in C|\min\limits_{x\in[0,l]}\mathrm{Re}(N_\lambda+\frac{1}{2}N'-\frac{1}{2}P^{(3)}+\frac{1}{2}q''+\frac{4}{l^4}(1-l^2\|\frac{3}{2}P'-q\|_c))>0\}$ 时，$\hat{A}_\lambda$ 是一对一的线性有界；

(ii) 若 $P(x)\in C^3[0,l]$，$q(x)\in C^2[0,l]$，$N(x)\in C^1[0,l]$，并且满足 $\frac{1}{2}\|P\|_c+l^2\|P'-\frac{1}{2}\|P\|_c-q\|_c\leqslant 1$，则当 $\lambda\in\{\lambda\in C|\min\limits_{x\in[0,l]}\mathrm{Re}(N_\lambda+\frac{N'}{2}-\frac{P^{(3)}}{2}+\frac{q''}{2}+\frac{4}{l^4}(1-\frac{1}{2}\|P\|_c-l\|P'-q-\frac{1}{2}\|P\|_c\|_c))>0\}$ 时，$\hat{A}_\lambda$ 是一对一线性有界.

证明 (i) $y\in K_{(0,2)}$，则

$$\mathrm{Re}(\hat{A}_\lambda y,y)=\|y''\|_{L^2}^2+\int_0^l(\frac{3}{2}P'-q)|y'|^2dx+\int_0^l\mathrm{Re}(N_\lambda+\frac{N'}{2}-\frac{P^{(3)}}{2}+\frac{q''}{2})||y|^2dx$$
$$\geqslant(1-l^2\|\frac{3}{2}P'-q\|_c)\|y''\|_{L^2}^2$$
$$+\int_0^l\mathrm{Re}(N_\lambda+\frac{1}{2}N'-\frac{1}{2}P^{(3)}+\frac{1}{2}q'')|y|^2dx$$

$$\geqslant \int_0^l \operatorname{Re}(N_\lambda + \frac{1}{2}N - \frac{1}{2}P^{(3)} + \frac{1}{2}q'' + \frac{4}{l^4}(1 - l^2 \| \frac{3}{2}P' - q \|_c))|y|^2 dx.$$

(其中第一不等式用 $\| y' \|_{L^2}^2 \leqslant l^2 \| y'' \|_{L^2}^2$ 第二不等式用已知条件及 $\| y'' \|_{L^2}^2 \geqslant \frac{1}{l^2} \| y' \|_{L^2}^2 \geqslant \frac{4}{l^4} \| y \|_{L^2}^2$). 即(i)的结果.

(ii) 对 $y \in K_{(0,2)}$,有

$$\operatorname{Re}\hat{A}_\lambda(y,y) = \| y'' \|_{L^2}^2 + \operatorname{Re}\int_0^l P y^{(3)} \bar{y} dx + \operatorname{Re}\int_0^l q y'' \bar{y} dx + \operatorname{Re}\int_0^l (N_\lambda + \frac{1}{2}N')|y|^2 dx.$$

<a> 由 $y_{x=0,l} = 0$

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\int_0^l P y^{(3)} \bar{y} dx &= -\operatorname{Re}\int_0^l (P'\bar{y} + P\bar{y}')y'' dx \\ &\geqslant \operatorname{Re}\int_0^l (P''\bar{y} + P'\bar{y}')y' dx - \frac{1}{2}\| P \|_c (\| y' \|_{L^2}^2 + \| y'' \|_{L^2}^2) \\ &= -\frac{1}{2}\| P \|_c \| y'' \|_{L^2}^2 + \int_0^l (P' - \frac{1}{2}\| P \|_c)|y'|^2 dx - \frac{1}{2}\int_0^l P^{(3)}|y|^2 dx.\end{aligned}$$

<b> $\operatorname{Re}\int_0^l q y'' \bar{y} dx = -\operatorname{Re}\int_0^l (q'\bar{y} + q\bar{y}')y' dx = -\int_0^l q|y'|^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^l q''|y|^2 dx.$

由对 $y \in K_{(0,2)}$,有 $\| y \|_{L^2}^2 \leqslant \frac{l^2}{4}\| y' \|_{L^2}^2$, $\| y' \|_{L^2}^2 \leqslant l^2 \| y'' \|_{L^2}^2$, 及已知

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}(\hat{A}y,y) &\geqslant (1 - \frac{1}{2}\| P \|_c \| y'' \|_{L^2}^2 + \int_0^l (P' - q - \frac{1}{2}\| P \|_c)|y'|^2 dx \\ &\quad + \int_0^l \operatorname{Re}(N_\lambda + \frac{1}{2}N' - \frac{1}{2}P^{(3)} + \frac{1}{2}q'')|y|^2 \| dx \\ &\geqslant (1 - \frac{1}{2}\| P \|_c - l^2 \| P' - q - \frac{1}{2}\| P \|_c \|_c) \| y'' \|_{L^2}^2 \\ &\quad + \int_0^l \operatorname{Re}(N_\lambda + \frac{1}{2}N' - \frac{1}{2}P^{(3)} + \frac{1}{2}q'')|y|^2 dx \\ &\geqslant \int_0^l \operatorname{Re}(N_\lambda + \frac{N'}{2} - \frac{P^{(3)}}{2} + \frac{q''}{2} + \frac{4}{l^4}(1 - \frac{1}{2}\| P \|_c \\ &\quad - l^2 \| P' - q - \frac{1}{2}\| P \|_c \|_c))|y|^2 dx.\end{aligned}$$

我们同样可处理对 $K_{(1,3)}, K_{(2,3)}$ 的问题,以下将四类 $K(i,j)$; $(i,j) = (0,1),(0,2),(1,3),(2,3)$ 放置于一起处理,即给出 λ 的范围使 $\hat{A}_\lambda$ 对四种空间均成为一对一线性有界算子.

<3> 对于 $K_{(i,j)}$, $(i,j) = (0,1),(0,2),(1,3)(2,3)$ 的联合处理.

定理 3 考虑 $\hat{A}_\lambda: (K_{(i,j)}, \| \cdot \|_{H^4}) \to (A_\lambda K_{(i,j)}, \| \cdot \|_{L^2})$, (i,j) 可取上述四对,并设 $P \in C'[0,l]$, $q, N \in C[0,l]$, $P_{0,l} = 0$, 且满足.

$$\| P' \|_c + \| q \|_c + (l^2 + 9)\| P' - \| N \|_c \|_c \leqslant 2,$$

则当 $\lambda \in \{\lambda \in C | \min_{x\in[0,l]} \operatorname{Re}(N_\lambda - \frac{1}{2}(\| P' \|_c + \| q \|_c + \| N \|_c) - \frac{1}{2}(\frac{9^2}{l^2} + 9)\| P' - \| N \|_c \|_c) > 0\}$ 时, $\hat{A}_\lambda$ 对上述四个空间同时是一对一的线性有界算子.

证明: $y = K_{(i,j)}$, $(i,j) = (0,1),(0,2)、(1,3),(2,3)$,有

$$\operatorname{Re}(\hat{A}_\lambda y,y) = \| y'' \|_{L^2}^2 + \operatorname{Re}\int_0^l P y^{(3)}\bar{y} dx + Re\int_0^l q y'' \bar{y} - \operatorname{Re}\int_0^l N y' \bar{y} dx + \operatorname{Re}\int_0^l N_\lambda |y|^2 dx.$$

<a> 由 $P_{x=0,l}=0$，

$$\mathrm{Re}\int_0^l Py^{(3)}\bar{y}dx=-\mathrm{Re}\int_0^l(P'\bar{y}+P\bar{y}')y''dx$$

$$\geqslant-\frac{1}{2}\|P'\|_c\|y''\|_{L^2}^2+\frac{1}{2}\int_0^l P'|y'|^2dx-\frac{1}{2}\|P'\|_c\|y\|_{L^2}^2,$$

<b> $\mathrm{Re}\int_0^l qy''\bar{y}dx\geqslant-\frac{1}{2}\|q\|_c(\|y''\|_{L^2}^2+\|y\|_{L^2}^2)$.

<c> $-\mathrm{Re}\int_0^l Nyq\bar{y}dx\geqslant-\frac{1}{2}\|N\|_c(\|y'\|_{L^2}^2+\|y\|_{L^2}^2)$.

注意类似 Sobolev 空间的内插不等式可证：

$$\|y'\|_{L^2}^2\leqslant(l^2+9)\|y''\|_{L^2}^2+(\frac{9^2}{l^2}+9)\|y\|_{L^2}^2,$$

并利用已知条件

$$\mathrm{Re}(\hat{A}_\lambda y,y)\geqslant(1-\frac{1}{2}\|P'\|_c-\frac{1}{2}\|q\|_c)\|y''\|_{L^2}^2+\frac{1}{2}\int_0^l(P'-\|N\|_c)|y'|^2dx$$

$$+\int_0^l\mathrm{Re}(N_\lambda-\frac{1}{2}(\|P'\|_c+\|q\|_c+\|N\|_c))|y|^2dx$$

$$\geqslant(1-\frac{1}{2}(\|P'\|_c+\|q\|_c)\frac{l}{2}(l^2+9)\|P'-\|N\|_c\|_c)\|y''\|_{L^2}^2$$

$$+\int_0^l\mathrm{Re}(N_\lambda-\frac{1}{2}(\|P'\|_c+\|q\|_c+\|N\|_c)$$

$$-\frac{1}{2}(\frac{9^2}{l^2}+9)\|P'-\|N\|_c\|_c)|y|^2dx$$

$$\geqslant\int_0^l\mathrm{Re}(N_\lambda-\frac{1}{2}(\|P'\|_c+\|q\|_c+\|N\|_c)$$

$$-\frac{1}{2}(\frac{9^2}{l^2}+9)\|P'-\|N\|_c\|_c)|y|^2dx.$$

(其中第一个不等号用上述 <a>，<b>，<c>；第二不等号利用不等式 $\|y'\|_{L^2}^2\leqslant(l^2+9)\|y''\|_{L^2}^2+(\frac{9^2}{l^2}+9)\|y\|_{L^2}^2$；第三个不等号利用已知条件 $\|P'\|_c+\|q\|_c+(l^2+9)\|P'-\|N\|_c\|_c\leqslant 2$)。

证明的其余部分为显然. 证毕.

2、 算子 A_λ 的正则性处理

我们对 A_λ 处理正则性，为方便对于 $\lambda\in R$ 进行处理.

<1> 对 $K_{(0,1)}$ 的结果：

定理 4. 考虑算子 $A_\lambda:(K_{(0,1)},\|\cdot\|_{H^4})\to(A_\lambda K_{(0,2)},\|\cdot\|_{L^2})$，并假定 $N(x)\in C^4[0,l]$，$N(0)=N(l)=0$，则 $\exists M=M_N$(仅依赖于 N)，使得当 $|\lambda|>M$ 时，A_λ 是正则算子，即 A_λ 一一线性有界且有有界逆算子.

证明： 对于 $y\in K_{(0,1)}$，$\lambda\in R$，有

$$\|A_\lambda y\|_{L^2}^2=\int_0^l A_\lambda y\,\overline{A_\lambda y}dx$$

$$= \| y^{(4)} \|_{L^2}^2 + \int_0^l (2N_\lambda - 3N) |y''|^2 dx + \int_0^l (N^2 + N^{(3)} - 4N''_\lambda) |y'|^2 dx$$

$$+ \int_0^l (N_\lambda^2 + N_\lambda^{(4)} + N'N_\lambda + NN''_\lambda) |y|^2 dx$$

$$\geqslant \| y^{(4)} \|_{L^2}^2 + \int_0^l (2N_\lambda - 3N - \frac{l^2}{4} \| N^2 + N^{(3)} - 4N''_\lambda \|_c) |y''|^2 dx$$

$$+ \int_0^l (N_\lambda^2 + N_\lambda^{(4)} + N'N_\lambda + NN'_\lambda) |y|^2 dx,$$

由于 $N_\lambda(x) = \lambda^2 + \frac{\lambda}{V_0} N(x), \lambda \in R$,故有

$$\lim_{|\lambda| \to \infty} \min_{x \in [0,l]} (2N_\lambda - 3N') = +\infty$$

$$\lim_{|\lambda| \to \infty} \min_{x \in [0,l]} (N_\lambda^2 - N_\lambda^{(4)} + N'N_\lambda + NN'_\lambda) = +\infty$$

$$\lim_{|\lambda| \to \infty} \min_{x \in [0,l]} (2N_\lambda - 3N') / \frac{l^2}{4} \| N^2 + N^{(3)} - 4N''_\lambda \|_c = +\infty.$$

故 $\exists M = M_N \geqslant 0$,使得当 $|\lambda| > M$ 时,有

(i) $\min_{x \in [0,l]} (2N_\lambda - 3N') \geqslant 0$;

(ii) $\min_{x \in [0,l]} (N_\lambda^2 - N_\lambda^{(4)} + N'N_\lambda + NN'_\lambda) \geqslant 0$;

(iii) $m_\lambda = \min_{x \in [0,l]} (2N_\lambda - 3N') \geqslant \frac{l^2}{4} \| N^2 + N^{(3)} - 4N''_\lambda \|_c$.

于是有

$$\| A_\lambda y \|_{L^2}^2 \geqslant \| y^{(4)} \|_{L^2}^2 + (m_\lambda - \frac{l^2}{4} \| N^2 + N^{(3)} - 4N''_\lambda \|_c) \| y'' \|_{L^2}^2 \geqslant \| y^{(4)} \|_{L^2}^2.$$

由 $y \in K_{(0,1)}$ 之端点条件有

$$\| y \|_{L^2}^2 \leqslant \frac{l^2}{4} \| y' \|_{L^2}^2, \quad \| y' \|_{L^2}^2 \leqslant \frac{l^2}{4} \| y'' \|_{L^2}^2, \quad \| y'' \|_{L^2}^2 \leqslant l^2 \| y^{(3)} \|_{L^2}^2, \quad \| y^{(3)} \|_{L^2}^2 \leqslant$$

$l^2 \| y^{(4)} \|_{L^2}^2$. 从而当 $|\lambda| > M$ 时

$$\| A_\lambda y \|_{L^2}^2 \geqslant \| y^{(4)} \|_{L^2}^2 \geqslant \frac{1}{2} \| y^{(4)} \|_{L^2}^2 + \frac{1}{2l^2} \| y^{(3)} \|_{L^2}^2$$

$$\geqslant \frac{1}{2} \| y^{(4)} \|_{L^2}^2 + \frac{1}{4l^2} \| y^{(3)} \|_{L^2}^2 + \frac{1}{4l^4} \| y^{(2)} \|_{L^2}^2$$

$$\geqslant \frac{1}{2} \| y^{(4)} \|_{L^2}^2 + \frac{1}{4l^2} \| y^{(3)} \|_{L^2}^2 + \frac{1}{8l^4} \| y'' \|_{L^2}^2 + \frac{1}{2l^6} \| y' \|_{L^2}^2$$

$$\geqslant \frac{1}{2} \| y^{(4)} \|_{L^2}^2 + \frac{1}{4l^2} \| y^{(3)} \|_{L^2}^2 + \frac{1}{8l^2} \| y'' \|_{L^2}^2 + \frac{1}{4l^6} \| y' \|_{L^2}^2 + \frac{1}{l^8} \| y \|_{L^2}^2$$

$$\geqslant \varepsilon_0^2 \| y \|_{H^4}^2,$$

$$\varepsilon_0^2 = \min\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4l^2}, \frac{1}{8l^4}, \frac{1}{4l^6}, \frac{1}{l^8}, \}.$$

于是当 $|\lambda| > M$ 时. $A_\lambda: (K_{(0,1)}, \| \cdot \|_{H^4}) \to (A_\lambda K_{(0,1)}, \| \cdot \|_{L^2})$ 是一一到上的且有有界逆算子 A_λ^{-1} 的线性有界算子,即 A_λ 正则,并且还有 $\| A_\lambda^{-1} \| \leqslant \varepsilon_0^{-1}$. 证毕.

我们对 $K_{(0,2)}, K_{(1,3)}, K_{(2,3)}$ 均可同样处理,以 $K_{(1,3)}$ 为例.

< 2 > 对 $K_{(1,3)}$ 的处理.

定理 5 考虑 $A_\lambda: (K_{(1,3)}, \| \cdot \|_{H^4}) \to (A_\lambda K_{(1,3)}, \| \cdot \|_{L^2})$,假定 $N(x) \in C^4[0,l], N^{(k)}_{x=0,l} = 0 \quad K = 0,1,2,3$,则 $\exists M = M(N) \geqslant 0$,使当 $|\lambda| > M$ 时,A_λ 是正则算子.

证明： 对 $y \in K_{(1,3)}$ 及 $N(x)$ 之条件，有

$$\| A_\lambda y \|_{L^2}^2 = \| y^{(4)} \|_{L^2}^2 + \int_0^l (2N_\lambda - 3N')|y''|^2 dx + \int_0^l (N^2 + N^{(3)} - 4N''_\lambda)|y'|^2 dx$$

$$+ \int_0^l (N_\lambda^2 + N_\lambda^{(4)} + N'N_\lambda + NN'_\lambda)|y|^2 dx,$$

其次 $y \in K_{(1,3)}$ 推出，

$$\| y' \|_{L^2}^2 \leqslant \frac{l^2}{4} \| y'' \|_{L^2}^2, \quad \| y'' \|_{L^2}^2 \leqslant l^2 \| y^{(3)} \|_{L^2}^2, \quad \| y^{(3)} \|_{L^2}^2 \leqslant \frac{l^2}{4} \| y^{(4)} \|_{L^2}^2.$$

令 $\varepsilon_0^2 = \min\{\frac{1}{2}, \frac{1}{l^2}, \frac{1}{2l^4}, \frac{1}{l^6}\}$，取 $M_N = M \geqslant 0$，使当 $|\lambda| > M$ 时，有

(i) $m_\lambda = \min\limits_{x \in [0,l]} (2N_\lambda - 3N') \geqslant 0$；(ii) $\min\limits_{x \in [0,l]} (N_\lambda^2 + N_\lambda^{(4)} + N'N_\lambda + NN'_\lambda) \geqslant \varepsilon_0^2$；

(iii) $m_\lambda \geqslant \frac{l^2}{4} \| N^2 + N^{(3)} - 4N''_\lambda \|_c$.

于是当 $|\lambda| > M$ 时，

$$\| A_\lambda y \|_{L^2}^2 \geqslant \| y^{(4)} \|_{L^2}^2 + m_\lambda \| y'' \|_{L^2}^2 - \frac{l}{4} \| N^2 + N^{(3)} - 4N''_\lambda \|_c \| y'' \|_{L^2}^2 + \varepsilon_0^2 \| y \|_{L^2}^2$$

$$\geqslant \| y^{(4)} \|_{L^2}^2 + \varepsilon_0^2 \| y \|_{L^2}^2 \geqslant \varepsilon_0^2 \| y \|_{H^4}^2.$$

从而 $|\lambda| > M$ 时，$A_\lambda : (K_{(1,3)}, \| \cdot \|_{H^4}) \to (A_\lambda K_{(1,3)}, \| \cdot \|_{L^2})$ 正则，证毕.

注：在对 $K_{(0,1)}, K_{(0,2)}, K_{(1,3)}, K_{(2,3)}$ 的处理中，以 $K_{(2,3)}$ 最为复杂. 因为 $\| y \|_{L^2}^2$ 与 $\| y' \|_{L^2}^2$ 不能用高一阶导数的积分控制，但利用内插不等式则可以解决这一困难，我们用对四类的联合处理来刻划这种方法.

＜3＞ 对 $K_{(i,j)}, (i,j) = (0,1), (0,2), (1,3), (2,3)$ 的联合正则性.

定理 6 考虑 $A_\lambda : (K_{(i,j)}, \| \cdot \|_{H^4}) \to (A_\lambda K_{(i,j)}, \| \cdot \|_{L^2})$，且 $(i,j) = (0,1), (0,2), (1,3), (2,3)$，则我们有

(i) 若 $N(x) \in C^2[0,l]$，且 $N_{0,l} = N'_{0,l} = 0$，则当 $\lambda \in \{\lambda \in R | \min\limits_{x \in [0,l]} (2N_\lambda - 3N' - \| N''_\lambda \|_c - \| N'' \|_c - (l^2 + 9) \| N^2 - 2N''_\lambda - \| N'' \|_c - \varepsilon_0^2 \|_c) \geqslant 0$，且 $\min\limits_{x \in [0,l]} (N_\lambda^2 + N'N_\lambda + NN'_\lambda - \| N''_\lambda \|_c - (\frac{9^2}{l^2} + 9) \| N^2 - 2N''_\lambda - \| N'' \|_c - \varepsilon_0^2 \|_c) \geqslant \varepsilon_0^2\}$ 时，算子 A_λ 对四种 $K_{i,j}$ 均正则，且有估计

$$\| A_\lambda y \|_{L^2}^2 \geqslant \varepsilon_0^2 \| y \|_{H^4}^2,$$

其中 $\varepsilon_0^2 = \min\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4l^2}; \frac{1}{4l^4}\}$.

(ii) 若 $N(x) \in C^3[0,l]$，且 $N_{0,l} = N'_{0,l} = N''_{0,l} = 0$，则当 $\lambda \in \{\lambda \in R | \min\limits_{x \in [0,l]} (2N_\lambda - 3N' - (l^2 + 9) \| N^2 + N^{(3)} - 4N''_\lambda - \| N^{(3)_\lambda} \|_c - \varepsilon_0^2 \|_c) \geqslant 0$，并且 $\min\limits_{x \in [0,l]} (N_\lambda^2 + N'N_\lambda + NN'_\lambda - \| N_\lambda^{(3)} \|_c - (\frac{9^2}{l^2} + 9) \| N^2 + N_\lambda^{(3)} - 4N''_\lambda - \| N^{(3)} \|_c - \varepsilon_0^2 \|_c) \geqslant \varepsilon_0^2\}$ 时，A_λ 对四种 $K_{(i,j)}$ 均正则，且有估计

$$\| A_\lambda y \|_{L^2}^2 \geqslant \varepsilon_0^2 \| y \|_{H^4}^2,$$

其中 $\varepsilon_0^2 = \min\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4l^2}, \frac{1}{4l^4}\}$.

特别，由 $N_\lambda(x)=\lambda^2+\frac{\lambda}{V_0}N(x)$ 可知，上(i)，(ii) 之结论对绝对值充分大的 $\lambda\in R$ 必定成立.

证明 (i) 对 $y\in K_{(i,j)}$，$(i,j)=(0,1),(0,2),(1,3),(2,3)$.

<a> 由 $N_{0,l}=N'_{0,l}=0$

$$-\int_0^l N\,(y^{(4)}\bar y'+\bar y^{(4)}y')dx=-3\int_0^l N'|y''|^2dx-\int_0^l N''(y''\bar y'+\bar y''y')dx$$

$$\geqslant\int_0^l(-3N'-\|N''\|_c)|y''|^2dx-\|N''\|_c\|y'\|^2_{L^2}.$$

<b> $\int_0^l N_\lambda(y^{(4)}\bar y+\bar y^{(4)}y)dx$

$$=2\int_0^l N_\lambda|y''|^2dx+2\int_0^l N'_\lambda(y''\bar y'+\bar y''y')dx+\int_0^l N''_\lambda(y''\bar y+\bar y''y)dx$$

$$\geqslant 2\int_0^l N_\lambda|y''|^2dx-2\int_0^l N''_\lambda|y'|^2dx-\|N''_\lambda\|_c(\|y''\|^2_{L^2}+\|y\|^2_{L^2})$$

$$=\int_0^l(2N_\lambda-\|N''_\lambda\|_c)|y''|^2dx-2\int_0^l N''_\lambda|y'|^2dx-\|N''_\lambda\|_c\|y\|^2_{L^2}.$$

<c> $-\int_0^l NN_\lambda(y'\bar y+\bar y'y)dx=\int_0^l(N'N_\lambda+NN'_\lambda)|y|^2dx.$

于是

$$\|A_\lambda y\|^2_{L^2}\geqslant\|y^{(4)}\|^2_{L^2}+\int_0^l(2N_\lambda-\|N''_\lambda\|_c-3N'-\|N''\|_c)|y''|^2dx$$
$$+\int_0^l(N^2-2N''_\lambda-\|N''\|_c)|y'|^2dx$$
$$+\int_0^l(N_\lambda^2+N'N_\lambda+NN'_\lambda-\|N''_\lambda\|_c)|y|^2dx.$$

由于

$$\int_0^l(N^2-2N''_\lambda-\|N''\|_c)|y'|^2dx$$
$$\geqslant\varepsilon_0^2\|y'\|^2_{L^2}-\|N^2-2N''_\lambda-\|N''\|_c-\varepsilon_0^2\|_c\|y'\|^2_{L^2}$$
$$\geqslant\varepsilon_0^2\|y'\|^2_{L^2}-(l^2+9)\|N^2-2N''_\lambda-\|N''\|_c-\varepsilon_0^2\|_c\|y''\|^2_{L^2}$$
$$-(\frac{9^2}{l^2}+9)\|N^2-2N''_\lambda-\|N''\|_c-\varepsilon_0^2\|_c\|y\|^2_{L^2},$$

故得

$$\|A_\lambda y\|^2_{L^2}\geqslant\|y^{(4)}\|^2_{L^2}+\int_0^l(2N_\lambda-\|N''_\lambda\|_c-3N'-\|N''\|_c-(l^2+9)\|N^2-2N''_\lambda$$
$$-\|N''\|_c-\varepsilon_0^2\|_c)|y''|^2dx+\varepsilon_0^2\|y'\|^2_{L^2}$$
$$+\int_0^l(N_\lambda^2+N'N_\lambda+NN'_\lambda-\|N''_\lambda\|_c$$
$$-(\frac{9^2}{l^2}+9)\|N^2-2N''_\lambda-\|N''\|_c-\varepsilon_0^2\|_c)|y|^2dx,$$

从而当 $\lambda\in\{\lambda\in R|\min\limits_{x\in[0,l]}(2N_\lambda-\|N''_\lambda\|_c-3N'-\|N''\|_c-(l^2+9)\|N^2-2N''_\lambda-\|N''\|_c-\varepsilon_0^2\|_c)\geqslant 0$ 且 $\min\limits_{x\in[0,l]}(N_\lambda^2+N'N_\lambda+NN'_\lambda-\|N_\lambda''\|_c-(\frac{9^2}{l^2}+9)\|N^2-2N''_\lambda-\|N''\|_c-\varepsilon_0^2\|_c)\geqslant\varepsilon_0^2\}$ 时，有

$$\|A_\lambda y\|_{L^2}^2 \geqslant \|y^{(4)}\|_{L^2}^2 + \varepsilon_0^2(\|y'\|_{L^2}^2 + \|y\|_{L^2}^2)$$
$$\geqslant \frac{1}{2}\|y^{(4)}\|_{L^2}^2 + \frac{1}{4l^2}\|y^{(3)}\|_{L^2}^2 + \frac{1}{4l^4}\|y''\|_{L^2}^2 + \varepsilon_0^2(\|y'\|_{L^2}^2 + \|y\|_{L^2}^2)$$
$$\geqslant \varepsilon_0^2\|y\|_{H^4}^2.$$

注意，当 $y \in K_{(i,j)}$， $(i,j)=(0,1),(0,2),(1,3),(2,3)$，均使 y''，$y^{(3)}$ 至少有一个零点，从而 $\|y''\|_{L^2}^2 \leqslant l^2\|y^{(3)}\|_{L^2}^2$， $\|y^{(3)}\|_{L^2}^2 \leqslant l^2\|y^{(4)}\|_{L^2}^2$ 总成立，其余部分是显然的.

(ii) 当 $N(x)\in C^3[0,l]$， $N_{0,l}=N'_{0,l}=N''_{0,l}=0$，对于 $y\in K_{(i,j)}$， $(i,j)=(0,1),(0,2),(1,3),(2,3)$，

$$\langle a \rangle \quad -\int_0^l N(y^{(4)}\bar{y}' + \bar{y}^{(4)}y')dx = -3\int_0^l N'|y''|^2dx + \int_0^l N^{(3)}|y'|^2dx,$$

$$\langle b \rangle \quad \int_0^l N_\lambda(y^{(4)}\bar{y} + \bar{y}^{(4)}y)dx = 2\int_0^l N_\lambda|y''|^2dx - 4\int_2^l N''_\lambda|y'|^2dx - \int_2^l N_\lambda^{(3)}(y'\bar{y} + \bar{y}'y)dx$$
$$\geqslant 2\int_0^l N_\lambda|y''|^2dx - 4\int_0^l N''_\lambda|y'|^2dx - \|N_\lambda^{(3)}\|_c(\|y'\|_{L^2}^2 + \|y\|_{L^2}^2)$$
$$= 2\int_0^l N_\lambda|y''|^2dx - \int_0^l(4N''_\lambda + \|N_\lambda^{(3)}\|_c)|y'|^2dx - \|N_\lambda^{(3)}\|_c\|y\|_{L^2}^2.$$

$$\langle c \rangle \quad -\int_0^l NN_\lambda(y'\bar{y} + \bar{y}'y)dx = \int_0^l(N'N_\lambda + NN_\lambda')|y|^2dx,$$

于是

$$\|A_\lambda y\|_{L^2}^2 \geqslant \|y_{(4)}\|_{L^2}^2 + \int_0^l(2N_\lambda - 3N')|y''|^2dx$$
$$+ \int_0^l(N^2 + N^{(3)} - 4N''_\lambda - \|N_\lambda^{(3)}\|_c)|y'|^2dx$$
$$+ \int_0^l(N_\lambda^2 + N'N_\lambda + NN'_\lambda - \|N_\lambda^{(3)}\|_c)|y|^2dx.$$

又

$$\int_0^l(N^2 + N^{(3)} - 4N''_\lambda - \|N_\lambda^{(3)}\|_c)|y'|^2dx$$
$$\geqslant \varepsilon_0^2\|y'\|_{L^2}^2 - \|N^2 + N^{(3)} - 4N''_\lambda - \|N_\lambda^{(3)}\|_c - \varepsilon_0^2\|_c((l^2+9)\|y''\|_{L^2}^2$$
$$+ (\frac{9^2}{l^2} + 9)\|y\|_{L^2}^2,$$

故

$$\|A_\lambda y\|_{L^2}^2 \geqslant \|y^{(4)}\|_{L^2}^2 + \int_0^l(2N_\lambda - 3N' - (l^2+9)\|N^2 + N^{(3)} - 4N''_\lambda$$
$$- \|N_\lambda^{(3)}\|_c - \varepsilon_0^2\|_c)|y''|^2dx + \varepsilon_0^2\|y'\|_{L^2}^2 + \int_0^l(N_\lambda^2 + N'N_\lambda + NN'_\lambda$$
$$- \|N_\lambda^{(3)}\|_c - (\frac{9^2}{l^2} + 9)\|N^2 + N^{(3)} - 4N''_\lambda - \|N_\lambda^{(3)}\|_c - \varepsilon_0^2\|_c)|y|^2dx.$$

于是对(ii)中满足条件的 λ.

$$\|A_\lambda y\|_{L^2}^2 \geqslant \|y^{(4)}\|_{L^2}^2 + \varepsilon_0^2\|y'\|_{L^2}^2 + \varepsilon_0^2\|y\|_{L^2}^2 \geqslant \varepsilon_0^2\|y\|_{H^4}^2. \qquad \text{证毕.}$$

3、 对于 A_λ 的扩张同构与同构

由于 $K_{(i,j)} \subset C^4(\overline{(0,l)}) \subset H^4(0,l)$，故 $(K_{(i,j)}, \|\cdot\|_{H^4})$ 可视作Sobolev空间 $(H^4_{(0,l)}, \|\cdot\|_{H^4})$

的子空间，于是$(\overline{K}_{(i,j)}^{\|\cdot\|_{H^4}}, \|\cdot\|_{H^4})$是Hilbert空间，同样$(\overline{A_\lambda K_{(i,j)}}^{\|\cdot\|_{L^2}}, \|\cdot\|_{L^2})$，也可视作$(L^2(0,l), \|\cdot\|_{L^2})$的子空间，因而也是Hilbert空间，又对$y \in C^4[0,l]$，令 $\|y\|_{c^4} = \sum_{k=0}^{4} \|y^{(k)}\|_c$，因$(C^4[0,l], \|\cdot\|_{c^4})$是Banach空间，易见$(K_{(i,j)}, \|\cdot\|_{c^4})$为其闭子空间，从而$(K_{(i,j)}, \|\cdot\|_{c^4})$也是Banach空间，于是我们有如下的扩张同构定理及同构定理：

定理7 考虑$A_\lambda: K_{(i,j)} \to A_\lambda K_{(i,j)}$，$(i,j) = (0,1),(0,2),(1,3),(2,3)$中的任一，也可任选其几个联合处理．若 $\exists\ M = M_\lambda \geqslant 0$，使当$|\lambda| > M$时，有

$$\|A_\lambda y\|_{L^2}^2 \geqslant \varepsilon_0^2 \|y\|_{H^4} \qquad \forall\ y \in K_{(i,j)} \tag{$*$}$$

其中$\varepsilon_0 > 0$，M仅依赖于$N(x)$，则有

(i) $A_\lambda: (K_{(i,j)}, \|\cdot\|_{H^4}) \to (A_\lambda K_{(i,j)}, \|\cdot\|_{L^2})$是线性同构．

(ii) 在(i)中的A_λ有唯一的扩张同构(保范)．

$$\widetilde{A}_\lambda: (\overline{K}_{(i,j)}^{\|\cdot\|_{H^4}}, \|\cdot\|_{H^4}) \to (\overline{A_\lambda K}_{(i,j)}^{\|\cdot\|_{L^2}}, \|\cdot\|_{L^2});$$

(iii) $A_\lambda: (K_{(i,j)}, \|\cdot\|_{c^4}) \to (A_\lambda K_{(i,j)}, \|\cdot\|_c)$．也是线性同构．

证明 (i) 由($*$)条件为显然．

(ii) 首先(i)中的$A_\lambda: (K_{(i,j)}, \|\cdot\|_{H^4}) \to (A_\lambda K_{(i,j)} \|\cdot\|_{L^2})$有唯一的保范扩张．

$$\widetilde{A}_\lambda: (\overline{K}_{(i,j)}^{\|\cdot\|_{H^4}}) \to (L^2(0.l), \|\cdot\|_{L^2}),$$

我们来证明：$\widetilde{A}_\lambda: (\overline{K}_{(i,j)}^{\|\cdot\|_{H^4}}, \|\cdot\|_{H^4}) \to (\overline{A_\lambda K}_{(i,j)}^{\|\cdot\|_{L^2}}, \|\cdot\|_{L^2})$是一一到上的线性有界算子，从而由逆算子定理知，$\widetilde{A}_\lambda$是扩张同构．

(1) 先证明$\widetilde{A}_\lambda \overline{K}_{(i,j)}^{\|\cdot\|_{H^4}} \subset \overline{A_\lambda K}_{(i,j)}^{\|\cdot\|_{L^2}}$，$\forall\ y_0 \in \overline{K}_{(i,j)}^{\|\cdot\|_{H^4}}$， $\exists\ \{y_n\} \subset K_{(i,j)}$，使$y_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{L^2}} y_0$，由$\widetilde{A}_\lambda$在$\overline{K}_{(i,j)}^{\|\cdot\|_{H^4}}$上连续，且在$K_{(i,j)}$上$\widetilde{A}_\lambda = A_\lambda$，

$$\widetilde{A}_\lambda y_0 = \lim_{n\to\infty} \widetilde{A}_\lambda y_n = \lim_{n\to\infty} A_\lambda y_n \in \overline{A_\lambda K}_{(i,j)}^{\|\cdot\|_{L^2}}.$$

(2) A_λ是满射，只要证$\overline{A_\lambda K}_{(i,j)}^{\|\cdot\|_{L^2}} \subseteqq \widetilde{A}_\lambda \overline{K}_{(i,j)}^{\|\cdot\|_{H^4}}$， $\forall\ Z_0 \in \overline{A_\lambda K}_{(i,j)}^{\|\cdot\|_{L^2}}$，则 $\exists\ \{y_n\} \subset K_{(i,j)}$，使

$$A_\lambda y_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{L^2}} Z_0.$$

于是$\{A_\lambda y_n\} \subset A_\lambda K_{(i,j)}$且以$\|\cdot\|_{L^2}$范数为Cauchy序列，由($*$)知$\{y_n\}$是$K_{(i,j)}$中的$\|\cdot\|_{H^4}$范数的Cauchy序列．故 $\exists\ y_0 \in \overline{K}_{(i,j)}^{\|\cdot\|_{H^4}}$，使$y_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{H^4}} y_0$．

于是得

$$Z_0 = \lim_{n\to\infty} A_\lambda y_n = \lim_{n\to\infty} \widetilde{A}_\lambda y_n = \widetilde{A}_\lambda y_0 \in \widetilde{A}_\lambda \overline{K}_{(i,j)}^{\|\cdot\|_{H^4}}.$$

(3) $\widetilde{A}_\lambda$是一对一的．$\forall\ y_0 \in \overline{K}_{(i,j)}^{\|\cdot\|_{H^4}}$， $\exists\ \{y_n\} \subset K_{(i,j)}$，使$y_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{H^4}} y_0$．由条件($*$)．

$$\|A_\lambda y_n\|_{L^2}^2 \geqslant \varepsilon_0^2 \|y_n\|_{H^4}^2$$

令$n \to \infty$

$$\|\widetilde{A}_\lambda y_0\|_{L^2}^2 \geqslant \varepsilon_0^2 \|y_0\|_{H^4}^2.$$

故$\widetilde{A}_\lambda$是一对一的，由于$(\overline{K}_{(i,j)}^{\|\cdot\|_{H^4}})$与$(\overline{A_\lambda K}_{(i,j)}^{\|\cdot\|_{L^4}}, \|\cdot\|_{L^2})$均为Banach空间，且$\overline{A}_\lambda$有界，故$\widetilde{A}_\lambda$是同构(逆算子定理)．

(iii) 我们将证明在条件($*$)下，$(A_\lambda K_{(i,j)}, \|\cdot\|_c)$是Banach空间，且$A_\lambda: (K_{(i,j)}, \|\cdot\|_{c^4})$

$\to (A_\lambda K_{(i,j)}, \|\cdot\|_c)$ 是一一到上的线性有界算子

(1) A_λ 是到上的线性有界算子. 以上显然，由于 $\forall\, y \in K(i,j)$，

$$\|A_\lambda y\|_c = \|y^{(4)} - N(x)y' + N_\lambda(x)y\|_c \leqslant (1 + \|N\|_c + \|N_\lambda\|_c)\|y\|_{c^4}$$

故 A_λ 是有界线性算子，

(2) 由条件（$*$）易见 A_λ 是一对一的.

(3) $(A_\lambda K_{(i,j)}, \|\cdot\|_c)$ 是 Banach 空间

设 $\{A_\lambda y_n\}$ 至 $A_\lambda K_{(i,j)}$ 中 $\|\cdot\|_c$ 范数 Banach 序列，要证

$$A_\lambda y_n \to Z_0 \in (A_\lambda K_{(i,j)}, \|\cdot\|_c).$$

因 $\{A_\lambda y_n\}$ 是 $\|\cdot\|_c$ 范数 Cauchy 序列，我们要证 $\{y_n\}$ 是 $K_{(i,j)}$ 中的 $\|\cdot\|_{C^4}$ 范数收敛序列，只要证 $\{y_n\}$ 是 $\|\cdot\|_{C^4}$ 范数 Cauchy 序列.

不妨设 $A_\lambda y_n \xrightarrow{\|\cdot\|_c} 0$，来证 $y_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{c^4}} 0$，由 $\|A_\lambda y_n\|_c \to 0 \quad (n\to\infty)$，及 $[0,l]$ 有界，知 $\|A_\lambda y_n\|_{L^2} \to 0 \quad (n\to\infty)$，由（$*$）条件 $\|y_n\|_{H^4} \to 0 \quad (n\to\infty)$，$\forall\, x \in [0,l]\, |y_n(x) - y_n(0)| \leqslant \sqrt{l}\,\|y'_n\|_{L^2} \leqslant \sqrt{l}\,\|y_n\|_{H^4} \to 0$. 故

$$y_n(x) - y_n(0) \Rightarrow 0 \quad \forall\, x \in [0,l],$$

我们证明 $y_n(0) \to 0$，从而 $\|y_n\|_c \to 0$.

若不然，不妨设 $|y_n(0)| > \delta > 0, n = 1,2,3,\cdots$，取 $\varepsilon = \frac{1}{2}\delta$. $\exists\, N$，当 $n \geqslant N$ 时，有

$$|y_n(x) - y_n(0)| < \frac{\delta}{2} \quad \forall\, x \in [0,l]$$

从而当 $n \geqslant N$ 时，$\forall\, x \in [0,l]$，有

$$|y_n(x)| \geqslant |y_n(0)| - \frac{\delta}{2} \geqslant \frac{\delta}{2} > 0$$

于是 $\|y_n\|_{L^2}^2 \geqslant (\frac{\delta}{2})^2 l$，$\|y_n\|_{H^4}^2 \geqslant (\frac{\delta}{2})^2 l$ 对 $n \geqslant N$ 成立，矛盾.

从而 $y_n(0) \to 0 (n\to\infty)$，因而.

$$\|y_n\|_c \to 0 \quad (n\to\infty).$$

同理可证 $\|y_n^{(k)}\|_c \to 0 \quad (n\to\infty)$，$= 1,2,3$.

最后由

$$\|y_n^{(4)}\|_c \leqslant \|A_\lambda y_n\|_c + \|N\|_c\|y'_n\|_c + \|N_\lambda\|_c\|y_n\|_c \to 0 \quad (n\to\infty),$$

因而 $\|y_n\|_{C^4} \to 0 \quad (n\to\infty)$，这推出当 $\{A_\lambda y_n\}$ 是 $A_\lambda K_{(i,j)}$ 的 $\|\cdot\|_c$ 范数 Cauchy 序列时，$\{y_n\} \subset K_{(i,j)}$ 必是 $\|\cdot\|_{C^4}$ 范数 Cauchy 序列，因 $(K_{(i,j)}, \|\cdot\|_{c^4})$ 完备，知 $\exists\, y_0 \in K_{(i,j)}$，使 $y_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{c^4}} y_0$，最后由算子 $A_\lambda: (K_{(i,j)}, \|\cdot\|_{c^4}) \to (A_\lambda K_{(i,j)}, \|\cdot\|_c)$ 连续知 $A_\lambda y_n \to A_\lambda y_0 = Z_0 \in A_\lambda K_{i,j)}$，故 $A_\lambda: (K_{(i,j)}. \|\cdot\|_c)$ 是 Banach 空间，最后由逆算子定理知，$A_\lambda: (K_{(i,j)}, \|\cdot\|_{c^4}) \to (A_\lambda K_{i,j)}, \|\cdot\|_c)$ 是同构. 证毕.

注：在<二>正则性部分的结果完全可移植到这儿的扩张同构与新的同构中来.

参 考 文 献

[1]刘颖范,关于某个四阶非对称微分方程边值问题的唯一性处理(已投南京航空学院学报). 1990,No. 4.
[2]Admams, R. A. ,Sobolev SPaces, Spring verlag(1981)83—86
[3]夏道行、严绍宗等,实变函数与泛函分析下册,高校教育出版社,1987,193—213.
[4]Everitt,W. N. , J. London math Soc. , 43(1968) 465—473.
[5]Bergh, J. Lőfström,J. *Interpolation Space aces An Introductrion*, Spring Verlag(1976),26—75.

On the Behaviour of Some Four-Order Nonsymmeric Differential Operators with Parameter λ

Liu Yingfan
(Dept. of Appl., Nanjing Aeronautical Institue, Nanjing, China)

Abstract

This paper deals with the following four-order nonsymmetric differential operators $A_\lambda$with parameter λ, and its general form $\hat{A}_\lambda$ arising from viberation problems

$$A_\lambda: \quad (K_{(i,j)}, \|\cdot\|_{H^4}) \longrightarrow (A_\lambda K_{(i,j)}, \|\cdot\|_{L^2}, 0 \le i < j \le 3),$$

$$\hat{A}_\lambda: \quad (K_{(i,j)}, \|\cdot\|_{H^4}) \longrightarrow (A_\lambda K_{(i,j)}, \|\cdot\|_{L^2}).$$

We shall give the one-to-one bounded property and regularity property of $\hat{A}_\lambda$, via the techniques of estimation and functional analysis. In particular, we shall obtain the approximation solutions and new isomorphism for the extension isomorphism after endow the spaces with some new topologies.