第12卷第2期　　数学研究与评论　　Vol. 12 No. 2
1992年5月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　May 1992

关于Echelon空间无穷矩阵变换集的有界性*

林　萍
（北京师范学院分院，北京 100053）

摘　要

无穷矩阵变换是研究序列空间理论的重要工具. 研究一个空间到另一个空间无穷矩阵变换的形式，是序列空间理论中的重要内容，并且已有众多工作. 本文将进一步研究一般的Echelon 空间到空间 $l^p(1\leqslant p\leqslant\infty)$，$c$、$c_0$ 的无穷矩阵变换集的有界性. 所得结果的特例正是Echelon 空间到 $l^p(1\leqslant p\leqslant\infty)c$、$c_0$ 无穷矩阵变换的形式，同时概括了前人的许多结果.

1. 预备知识

ω 表示所有复数列 $\{x_n\}$ 的全体. 若序列空间 μ 满足 $\mu^{**}=\mu$，则称 μ 为完备序列空间，其中 $\mu^*=\{u:\in u\omega,\sum\limits_{i=1}^{\infty}|u_ix_i|<\infty,\forall\ x\in\mu\}$.

$b^{(k)}\in\omega,k=1,2,\cdots$，是 steps 的完全非负渐升系. 记

$$\lambda_{b^{(k)}}^p=\{x:x\in\omega,\sum_{i=1}^{\infty}b_i^{(k)}|x_i|^p<\infty\}$$

称

$$\lambda=\bigcap_{k=1}^{\infty}\lambda_{b^{(k)}}^p,\quad p\geqslant 1$$

为 p 阶 Echelon 空间，当 $p=1$ 时称 λ 为 Echelon 空间. 称

$$\lambda^*=\bigcup_{k=1}^{\infty}(\lambda_{b^{(k)}}^p)^*$$

为 p 阶 Co—Echelon 空间，当 $p=1$ 时称为 Co—Echelon 空间.

λ 的拓扑 τ 由半范族

$$r_k(x)=(\sum_{i=1}^{\infty}b_i^{(k)}|x_i|^p)^{\frac{1}{p}},\quad k=1,2,\cdots$$

确定. $\lambda(\tau)$ 是完备的 (F) 空间，且 $\tau=\tau_b(\lambda^*)$.

上述内容可参见[1]§30与[2].

2. Echelon 空间到 $l^p(1\leqslant p\leqslant\infty)$、$c$、$c_0$ 无穷矩阵变换集的有界性.

定义　设 λ、μ 为序列空间，$(\lambda,\mu)=\{A=(a_{ij}):A\lambda\subset\mu$ 并且对 $\forall\ x\in\lambda$ 有 $\sum\limits_{j=1}^{\infty}|a_{ij}x_j|<\infty,i=1,2,\cdots\}$. 称 $\mathscr{M}\subset(\lambda,\mu)$ 为有界集，若对 $\forall\ u\in\mu^*$ 及 $\forall\ x\in\lambda$，存在 $M(u,x)>0$，使得对 $\forall\ A\in\mathscr{M}$，均

* 1990年5月28日收到.

有

$$|uAx| \leqslant M$$

关于无穷矩阵变换集的有界性的研究，也可参看[3].

定理 1 设 λ 为 Echelon 空间，则下列条件是等价的：

(i) $\mathscr{M} \subset (\lambda, l^\infty)$ 为有界集.

(ii) $\{a^i = (a_{i1} a_{i2}, \cdots): i = 1, 2, \cdots, A = (a_{ij}), A \in \mathscr{M}\} \subset \lambda^*$ 是 $\sigma(\lambda^*, \lambda)$ 有界的.

(iii) 存在 $L > 0$ 及 $b^{(k)}$ 使得 $|a_{ij}| \leqslant L b_j^{(k)}, \forall\ i, j \geqslant 1. \forall\ A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}$.

证明 (i)⇒(ii) 由定义即知，$\{a^i = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots): i \geqslant 1, A = (a_{ij}), A \in \mathscr{M}\} \subset \lambda^*$. 对$\forall\ x \in \lambda$，令 $k_x = \{Ax: A \in \mathscr{M}\}$，则 $k_x \subset l^\infty$. 对$\forall\ u \in l^1$，因为 $\mathscr{M} \subset (\lambda, l^\infty)$ 为有界集，所以存在 $M(x, u) > 0$ 使得

$$|uAx| \leqslant M(x, u), \forall\ A \in \mathscr{M}$$

故 k_x 是 $\sigma(l^\infty, l^1)$ 有界的. 从而存在 $c(x) > 0$ 使得对$\forall\ i \geqslant 1, \forall\ A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}$.

$$|(Ax)_i| = |\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j| \leqslant c(x)$$

(参见[2]2.6.8). 故$\{a^i = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots): i \geqslant 1. A = (a_{ij}), A \in \mathscr{M}\} \subset \lambda^*$ 是 $\sigma(\lambda^*, \lambda)$ 有界的.

(ii)⇔(i) 对$\forall\ x \in \lambda, \forall\ u \in l^1$，由(ii)可知，存在 $M(x) > 0$ 使得对$\forall\ i \geqslant 1$ 及$\forall\ A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}$. $|\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j| \leqslant M(x)$

于是 $|uAx| = |\sum_{i=1}^{\infty} u_i \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j| \leqslant M(x) \sum_{i=1}^{\infty} |u_i|$. $\forall\ A \in \mathscr{M}$，故 $\mathscr{M} \subset (\lambda, l^\infty)$ 为有界集.

(ii)⇔(iii) 由[1]§30.8、(1)即可得证.

推论 1 下列条件是等价的： (i) $\mathscr{M} \subset (l^1, l^\infty)$ 为有界集.

(ii) 存在 $L > 0$ 使得 $|a_{ij}| \leqslant L, \forall\ i, j \geqslant 1$. $\forall\ A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}$.

当 $\mathscr{M}$ 为单个矩阵时，这就是[4]ch7. §1. 定理 5.

定理 2 设 λ 为 Echelon 空间，则下列条件是等价的：

(i) $\mathscr{M} \subset (\lambda, c)((\lambda, c_0))$ 为有界集.

(ii) 对$\forall\ A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}$，$\{a^i = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots): i \geqslant 1\} \subset \lambda^*$ 是 $\sigma(\lambda^*, \lambda)$ 收敛（收敛于 0）的，且 $\{a^i = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots): i \geqslant 1, A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}\}$ 是 $\sigma(\lambda^*, \lambda)$ 有界的.

(iii) 对$\forall\ A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}$，$\{a^i = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots): i \geqslant 1\} \subset \lambda^*$ 是坐标收敛（坐标收敛于 0）的，且 $\{a^i = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots): i \geqslant 1, A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}\}$ 是 $\sigma(\lambda^*, \lambda)$ 有界的.

(iv) 对$\forall\ A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}$，$\{(a_{1j}, a_{2j}, \cdots): j \geqslant 1\} \subset c(c_0)$，且存在 $L > 0$ 及 $b^{(k)}$ 使得

$$|a_{ij}| \leqslant L b_j^{(k)}, \forall\ i, j \geqslant 1. \quad \forall\ A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}$$

证明 由[1]§30.8(1)易知(ii)⇔(iii)⇔(iv). 只证(i)⇒(iii)和(ii)⇒(i).

(i)⇒(iii) 因为 $(\lambda, c)((\lambda, c_0)) \subset (\lambda, l^\infty)$ 且 $c^*(c_0^*) = (l^\infty)^* = l^1$，所以 $\mathscr{M} \subset (\lambda, l^\infty)$ 为有界集. 由定理 1 可知，$\{a^i = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots): i \geqslant 1, A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}\} \subset \lambda^*$ 是 $\sigma(\lambda^*, \lambda)$ 有界的. 对$\forall\ A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}$，因为 $e^j \in \lambda, \forall\ j \geqslant 1$，所以

$$Ae^j = (a_{ij}, a_{2j}, \cdots) \in c(c_0), \quad j \geqslant 1$$

即$\{a^i = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots): i \geqslant 1\}$是坐标收敛（坐标收敛于 0）的.

(ii)⇒(i) 由(ii)的前半部分知，$\mathscr{M} \subset (\lambda, c)((\lambda, c_0))$. 由(ii)的后半部分及定理 1 知．$\mathscr{M}$

为(λ,l^∞)中的有界集，即对$\forall\ x\in\lambda,\forall\ u\in l^1$，存在$M(x,u)>0$使得

$$|uAx|\leqslant M(x,u),\quad \forall\ A\in\mathscr{M}$$

因为$c^*(c_0^*)=l^1$，所以由定义可知$\mathscr{M}\subset(\lambda,c)((\lambda,c_0))$为有界集.

推论 2 下列条件是等价的：

(i)$\mathscr{M}\subset(l^1,c)((l^1,c_0))$为有界集.

(ii)对$\forall\ A=(a_{ij})\in\mathscr{M},\{(a_{1j},a_{2j},\cdots):j\geqslant1\}\subset c(c_0)$，且存在$L>0$使得

$$|a_{ij}|\leqslant L,\forall\ i,j\geqslant1,\quad\forall\ A=(a_{ij})\in\mathscr{M}$$

当$\mathscr{M}$为单个矩阵时，这就是[5]定理5(ii)、(iii).

引理 1 设λ为Echelon空间，μ为完备序列空间，则下列条件是等价的：

(i) $\mathscr{M}\subset(\lambda,\mu)$为有界集.

(ii) $\mathscr{M}'\subset(\mu^*,\lambda^*)$为有界集，其中$\mathscr{M}'=\{A':A\in\mathscr{M}\}$，$A'$为$A$的转置矩阵.

(iii) 对$\forall\ x\in\mu^*,\{A'\widetilde{\{x\}}:A\in\mathscr{M}\}\subset\lambda^*$为$\sigma(\lambda^*,\lambda)$有界的(注.$\widetilde{\{x\}}$为$\{x\}$的正规包).

(iv) 对$\forall\ x\in\mu^*,\{(\sum_{i=1}^{\infty}|a_{i1}x_i|,\sum_{i=1}^{\infty}|a_{i2}x_i|,\cdots):A=(a_{ij})\in\mathscr{M}\}\subset\lambda^*$为$\sigma(\lambda^*,\lambda)$有界的.

(v) 对$\forall\ x\in\mu^*$，存在$L>0$及$b^{(k)}$使得

$$\sum_{i=1}^{\infty}|a_{ij}x_i|\leqslant Lb_j^{(k)}.\ \forall\ j\geqslant1,\quad\forall\ A=(a_{ij})\in\mathscr{M}$$

证明 易证.

由引理1立即可得下述两定理.

定理 3 设λ为echelon空间，则下列条件是等价的：

(i) $\mathscr{M}\subset(\lambda,l^p)$为有界集，其中$1<p<\infty$.

(ii) 对$\forall\ x\in l^q$，存在$L>0$及$b^{(k)}$使得

$$\sum_{i=1}^{\infty}|a_{ij}x_i|\leqslant Lb_j^{(k)}.\ \forall\ j\geqslant1,\quad\forall\ A=(a_{ij})\in\mathscr{M}$$

其中$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

定理 4 设λ为Echelon空间，则下列条件是等价的：

(i) $\mathscr{M}\subset(\lambda,l^1)$为有界集.

(ii) 对$\forall\ x\in l^\infty$，存在$L>0$及$b_j^{(k)}$使得

$$\sum_{i=1}^{\infty}|a_{ij}x_i|\leqslant Lb_j^{(k)}.\ \forall\ j\geqslant1,\quad\forall\ A=(a_{ij})\in\mathscr{M}$$

(iii) 存在$L>0$及$b^{(k)}$使得

$$\sum_{i=1}^{\infty}|a_{ij}|\leqslant Lb_j^{(k)}.\ \forall\ j\geqslant1,\quad\forall\ A=(a_{ij})\in\mathscr{M}$$

推论 3 下列条件是等价的： (i)$\mathscr{M}\subset(l^1,l^1)$为有界集.

(ii) 存在$L>0$使得 $\sum_{i=1}^{\infty}|a_{ij}|\leqslant L,\forall\ j\geqslant1,\quad\forall\ A=(a_{ij})\in\mathscr{M}$.

当$\mathscr{M}$为单个矩阵时，这就是[2]命题4.6.10.

3 $p(p>1)$阶Echelon空间到l^∞、c、c_0无穷矩阵变换集的有界性.

引理 2 设λ为$p(p>1)$阶Echelon空间，则$N\subset\lambda^*$为$\sigma(\lambda^*,\lambda)$有界的充要条件是$N$坐

标有界且存在 $L>0$ 及自然数 k 与 l 使得

$$\sum_{j\in J_2}(b_j^{(k)})^{-\frac{q}{p}}|u_j|^q\leqslant L,\quad \forall\ u\in N\quad u_j=0,j\in J_1,j>l,\quad \forall\ u\in N$$ 其中 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,J_1=\{j:b_j^{(k)}=0,j=1,2,\cdots\},J_2=\{j:b_j^{(k)}>0,j=1,2,\cdots\}$.

证明 必要性由[1]§30.8.(2)及[2]2.6.2即可得证.

充分性 对 $\forall\ x\in\lambda$,存在 $y\in l^p$,使得 $x_j=(b_j^{(k)})^{-\frac{1}{p}}y_i$. $j\in J_2$

令

$$(\sum_{j\in J_2}|y_j|^p)^{\frac{1}{p}}=M\quad \sum_{j=1}^{l}|x_j|=M'$$

对 $\forall\ u\in N$,存在 $v\in l^q$,使得 $u_j=(b_j^{(k)})^{\frac{1}{p}}v_j,\quad j\in J_2$

因为

$$\sum_{j\in J_2}(b_j^{(k)})^{-\frac{q}{p}}|u_j|^q\leqslant L,\quad \forall\ u\in N$$

所以

$$\sum_{j\in J_2}(b_j^{(k)})^{-\frac{q}{p}}|(b_j^{(k)})^{\frac{1}{p}}v_j|^q\leqslant L,\quad \forall\ v\in N'$$

其中 $N'=\{v:v\in l^q,u_j=(b_j^{(k)})^{\frac{1}{p}}v_j,j\in J_2,v_j=0,j\in J_1,\quad \forall\ u\in N\}$. 即

$$\sum_{j\in J_2}|v_j|^q\leqslant L,\quad \forall\ v\in N'$$

由 N 坐标有界知存在 $L'>0$ 使得

$$|u_j|\leqslant L',\forall\ j\geqslant 1,\quad \forall\ u\in N$$

于是

$$|\sum_{j=1}^{\infty}x_ju_j|\leqslant\sum_{j=1}^{\infty}|x_ju_j|=\sum_{j\in J_1}|x_ju_j|+\sum_{j\in J_2}|x_ju_j|=\sum_{j\in J_1}|x_ju_j|+\sum_{j\in J_2}|y_jv_j|$$
$$\leqslant L'\sum_{j=1}^{l}|x_j|+(\sum_{j\in J_2}|y_j|^p)^{\frac{1}{p}}\cdot(\sum_{j\in J_2}|v_j|^q)^{\frac{1}{q}}\leqslant L'M'+ML^{\frac{1}{q}},\quad \forall\ u\in N$$

故 $N\subset\lambda^*$ 是 $\sigma(\lambda^*,\lambda)$ 有界的.

由引理2,仿定理1、2之证可得定理5、6.

定理5 设 λ 为 $p(p>1)$ 阶 Echelon 空间,则定理1中的条件(i)、(ii)与下列条件(iii)′都是等价的.

(iii)′ $\{a^i=(a_{i1},a_{i2},\cdots):i\geqslant 1,A=(a_{ij})\in\mathscr{M}\}$ 坐标有界且存在 $L>0$ 及自然数 k 与 l 使得

$$\sum_{j\in J_2}(b_j^{(k)})^{-\frac{q}{p}}|a_{ij}|^q\leqslant L,i\geqslant 1,\quad \forall\ A=(a_{ij})\in\mathscr{M}$$
$$a_{ij}=0,j\in J_1,j>l,i\geqslant 1,\quad \forall\ A=(a_{ij})\in\mathscr{M}$$

推论4 下列条件是等价的: (i) $\mathscr{M}\subset(l^p,l^\infty)$ 为有界集.

(ii) 存在 $L>0$ 使得 $\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|^q\leqslant L,i\geqslant 1,\quad \forall\ A=(a_{ij})\in\mathscr{M}$.

当 $\mathscr{M}$ 为单个矩阵时,这就是[6]定理1.

定理6 设 λ 为 $p(p>1)$ 阶 Echelon 空间,则定理2中的条件(i)、(ii)、(iii). 与下列条件

(iv)'都是等价的.

(iv)' 对$\forall\ A=(a_{ij})\in\mathscr{M}$, $(a_{1j},a_{2j},\cdots):j\geqslant 1\}\subset c(c_0)$, $\{a^i=(a_{i1},a_{i2},\cdots):i\geqslant 1, A=(a_{ij})\in\mathscr{M}\}$坐标有界且存在$L>0$及自然数$k$与$l$使得

$$\sum_{j\in J_2}(b_j^{(k)})^{-\frac{q}{p}}|a_{ij}|^q\leqslant L, i\geqslant 1,\quad \forall\ A=(a_{ij})\in\mathscr{M}$$

$$a_{ij}=0, j\in J_1, j>l, i\geqslant 1,\quad \forall\ A=(a_{ij})\in\mathscr{M}$$

推论 5 下列条件是等价的：

(i) $\mathscr{M}\subset(l^p,c)((l^p,c_0))$为有界集.

(ii) 对$\forall\ A=(a_{ij})\in\mathscr{M}$, $(a_{1j},a_{2j},\cdots):j\geqslant 1\}\subset c(c_0)$，且存在$L>0$使得

$$\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|^q\leqslant L, i\geqslant 1,\quad \forall\ A=(a_{ij})\in\mathscr{M}$$

当$\mathscr{M}$为单个矩阵时，这就是[6]p. 101 的系和[5]定理 8.

参 考 文 献

[1] G. Köthe, *Topological Vector Spaces* I, Springer—Verlag. 1983.

[2] P. K. Kamthan and Manjul Gupta, *Sequence Spaces and Series*, Marcel Dekker, INC. 1981.

[3] 吴从炘，完备空间与完备矩阵环(Ⅲ)，数学学报，14(3)(1964)，318—327.

[4] I. J. Maddox, *Elements of Functional Analysis*, 1970.

[5] I. J. maddox, M. A. L. Willey, *Continuous operators on paranormed spaces and matrix transformations*, Pacific J. Math. 53(1974), 217—228.

[6] C. G. Lascarides, I. J. Maddox, *Matrix transformations between some classes of sequences*, Proc. Cambridge Philos. Soc. 68(1970), 99—104.

Bounded Property of Infinite Matrix Transformation Set about Echelon Space

Lin Ping

(Mudanjiang Teachers' College)

Abstract

We study bounded property of infinte matrix transformation set from general echelon space to $l^P(1\leq P\leq\infty), C, C_0$. The resulted special example is the very forms of infinite matrix transformation from echelon space to $l_P(1\leq P\leq\infty), C, C_0$. We also summarize many know result in this field.