第12卷第2期 1992年5月
数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol. 12 No. 2 May 1992

# $S^4(1)$中常数量曲率的完备超曲面*

孙 华 飞
(东北工学院数学系,沈阳 110006)

## 摘 要

本文把[1]的结论推广到超曲面是完备的情形,即我们证明了:设$M^3$是单位球面$S^4(1)$中常平均曲率及常数量曲率的完备超曲面. 若$S\leqslant H^2+6$,则$S$只能等于$\frac{1}{3}H^2$, $\frac{3}{4}H^2-\frac{1}{4}\sqrt{H^4+8H^2}+3$, $\frac{3}{4}H^2+\frac{1}{4}\sqrt{H^4+8H^2}+3$, $H^2+6$这四个数. 其中$S$,$H$分别为$M^3$的第二基本形式长度的平方及$M^3$的平均曲率.

## 一 引 言

Peng 和 Terng[2]证明了

**定理A** 设$M^3$是单位球面$S^4(1)$中的紧致极小超曲面. 如果$M^3$的第二基本形式长度的平方$S$为常数且不大于6,则$S=0,3,6$.

孙自琪[1]把定理$A$推广到了超曲面是紧致的具有常平均曲率的情形,得到

**定理B** 设$M^3$是单位球面$S^4(1)$中紧致的具有常平均曲率的超曲面. 如果$S$为常数且$S\leqslant H^2+6$,则$S$只能等于$\frac{1}{3}H^2$, $\frac{3}{4}H^2-\frac{1}{4}\sqrt{H^4+8H^2}+3$, $\frac{3}{4}H^2+\frac{1}{4}\sqrt{H^4+8H^2}+3$, $H^2+6$这四个数.

本文把定理$B$推广到了超曲面是完备的情形,即获得

**定理C** 设$M^3$是单位球面$S^4(1)$中的完备的常平均曲率超曲面. 如果$S$为常数且$S\leqslant H^2+6$,则$S$只能等于$\frac{1}{3}H^2$, $\frac{3}{4}H^2-\frac{1}{4}\sqrt{H^4+8H^2}+3$, $\frac{3}{4}H^2+\frac{1}{4}\sqrt{H^4+8H^2}+3$, $H^2+6$这四个数.

## 二 主 要 结 论

**定理1** 设$M^n$是单位球面$S^{n+1}(1)$中的完备的常平均曲率超曲面,如果

$$\sup S\leqslant\frac{n}{2(n-1)}H^2-\frac{n-2}{2(n-1)}\sqrt{H^4+4(n-1)H^2}+n, \tag{2.1}$$

则$\sup S$只能等于$\frac{1}{n}H^2$ 或$\frac{n}{2(n-1)}H^2-\frac{n-2}{2(n-1)}\sqrt{H^4+4(n-1)H^2}+n$.

**推论1** 设$M^3$是单位球面$S^4(1)$中的完备的常平均曲率超曲面. 如果$S$是常数且

* 1990年1月18日收到.

$$S \leqslant \frac{3}{4}H^2 - \frac{1}{4}\sqrt{H^4 + 8H^2} + 3,$$

则 $S$ 只能等于$\frac{1}{3}H^2$ 或$\frac{3}{4}H^2-\frac{1}{4}\sqrt{H^4+8H^2}+3$.

**定理 2** 设 $M^3$ 是单位球面 $S^4(1)$ 中的完备的常平均曲率超曲面. 如果 $S$ 为常数且

$$\frac{3}{4}H^2 - \frac{1}{4}\sqrt{H^4 + 8H^2} + 3 < S \leqslant \frac{3}{4}H^2 + \frac{1}{4}\sqrt{H^4 + 8H^2} + 3,$$

则有

$$S = \frac{3}{4}H^2 + \frac{1}{4}\sqrt{H^4 + 8H^2} + 3.$$

**定理 3** 设 $M^3$ 是单位球面 $S^4(1)$ 中的完备的常平均曲率超曲面. 如果 $S$ 为常数且

$$\frac{3}{4}H^2 + \frac{1}{4}\sqrt{H^4 + 8H^2} + 3 < S \leqslant H^2 + 6,$$

则有

$$S = H^2 + 6.$$

## 三 记号，定义和基本公式

设 $S^{n+1}(1)$ 是 $n+1$ 维单位球面，$M^n$ 是浸入在 $S^{n+1}(1)$ 中的 $n$ 维超曲面. 我们约定指标的取值范围是

$$1 \leqslant A, B, C, \cdots, \leqslant n+1; \quad 1 \leqslant i, j, k, \cdots, \leqslant n.$$

选取 $S^{n+1}(1)$ 的正交标架场 $e_1, \cdots, e_{n+1}$，使得限制在 $M^n$ 上，$e_1, \cdots, e_n$ 切于 $M^n$. 记 $\omega_1, \cdots, \omega_{n+1}$ 为对偶标架场. 于是

$$d\omega_A = -\sum_B \omega_{AB} \wedge \omega_B, \quad \omega_{AB} + \omega_{BA} = 0,$$

$$d\omega_{AB} = -\sum_C \omega_{AC} \wedge \omega_{CB} + \frac{1}{2}\sum_{C,D} K_{ABCD}\omega_C \wedge \omega_D,$$

$$K_{ABCD} = \delta_{AC}\delta_{BD} - \delta_{AD}\delta_{BC}.$$

限制在 $M^n$ 上

$$\omega_{n+1} = 0, \omega_{n+1i} = \sum_j h_{ij}\omega_j, h_{ij} = h_{ji},$$

$$d\omega_{ij} = -\sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} + \frac{1}{2}\sum_{k,l} R_{ijkl}\omega_k \wedge \omega_l,$$

$$R_{ijkl} = K_{ijkl} + h_{ik}h_{jl} - h_{il}h_{jk}.$$

$M^n$ 的第二基本形式为 $h=\sum_{ij} h_{ij}\omega_i\omega_j e_{n+1}$ 其长度的平方为 $S=\sum_{i,j} h_{ij}^2$. $M^n$ 的平均曲率向量为 $\eta=\frac{1}{n}\sum_i h_{ii}e_{n+1}$，其中 $\sum_i h_{ii}=nH$，$H$ 为 $M^n$ 的平均曲率.

分别用下式定义 $h_{ijk}, h_{ijkl}, h_{ijklm}$

$$\sum_k h_{ijk}\omega_k = dh_{ij} - \sum_m h_{mj}\omega_{mi} - \sum_m h_{im}\omega_{mj},$$

$$\sum_l h_{ijkl}\omega_l = dh_{ijk} - \sum_m h_{mjk}\omega_{mi} - \sum_m h_{imk}\omega_{mj} - \sum_m h_{ijm}\omega_{mk},$$

$$\sum_m h_{ijklm}\omega_m = dh_{ijkl} - \sum_m h_{mjkl}\omega_{mi} - \sum_m h_{imkl}\omega_{mj} - \sum_m h_{ijml}\omega_{mk} - \sum_m h_{ijkm}\omega_{ml}.$$

由 Codazzi 方程知 $h_{ijk}=h_{ikj}$. 当 $H$ 为常数时,经计算得[1]

$$\frac{1}{2}\Delta S = S(n-s) - H^2 + Hf_3 + \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta\sum_{i,j,k}h_{ijk}^2 = {} & (2n+3-S)\sum_{i,j,k}h_{ijk}^2 - \frac{3}{2}|\nabla S|^2 + \sum_{i,j,k}h_{ijkl}^2 + 6\sum_{ijklm}h_{ijk}h_{ilm}h_{jl}h_{km} \\ & - 3\sum_{ijklm}h_{ijk}h_{ijl}h_{km}h_{ml} + 3H\sum_{ijkl}h_{ijk}h_{jlk}h_{li}h_{km}\end{aligned} \tag{3.2}$$

$$-H\Delta f_3 = \Delta\sum_{i,j,k}h_{ijk}^2 \tag{3.3}$$

其中 $f_k=\sum_i \lambda_i^k$, $\lambda_i$ 为 $M^n$ 的主曲率.

**引理** 3.1 [3] 设 $a_i(1\leqslant i\leqslant n)$是 $n$ 个实数,满足

$$\sum_i a_i = 0,\quad \sum_i a_i^2 = b > 0,$$

则

$$-\frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}b^{3/2} \leqslant \sum_i a_i^3 \leqslant \frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}b^{3/2},$$

等号成立的充要条件是 $a_i$ 中有 $n-1$ 个相同.

令 $\mu_i=\frac{H}{n}-\lambda_i, B_k=\sum_i \mu_i^k$,则

$$B_1 = 0,\quad B_2 = S - \frac{H^2}{n},\quad f_3 = \frac{3H}{n}S - \frac{2H^2}{n^2} - B_3. \tag{3.4}$$

由(3.1)和(3.4)得

$$\frac{1}{2}\Delta S = S(n-S) - H^2 + \frac{3H^2S}{n} - \frac{2H^4}{n^2} - HB_3 + \sum_{i,j,k}h_{ijk}^2. \tag{3.5}$$

由引理 3.1 和(3.4)可得

$$|B_3| \leqslant \frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}\left(S - \frac{H^2}{n}\right)^{3/2}. \tag{3.6}$$

## 四 定 理 的 证 明

**定理 1 的证明**

**引理** 4.1 [4]设 $M$ 是完备的黎曼流形,$M$ 的 Ricci 曲率下方有界. 设 $f$ 是 $M$ 是上的 $C^2$ 函数且上方有界,则存在点列$\{p_n\}\subset M$,使得

$$\lim_{n\to\infty}|df(p_n)| = 0, \lim_{n\to\infty}\Delta f(p_n) \leqslant 0; \lim_{n\to\infty}f(p_n) = \sup f.$$

由(3.5)和(3.6)得

$$\frac{1}{2}\Delta S \geqslant (\frac{H^2}{n}-S)\left[\sqrt{S-\frac{1}{n}H^2+\frac{n-2}{2\sqrt{n(n-1)}}|H|}-\sqrt{\frac{n}{4(n-1)}H^2+n}\right]$$
$$\times\left[\sqrt{S-\frac{1}{n}H^2+\frac{n-2}{2\sqrt{n(n-1)}}|H|}+\sqrt{\frac{n}{4(n-1)}H^2+n}\right]. \qquad (4.1)$$

由高斯方程得

$$R_{ij}=(n-1)\delta_{ij}+nHh_{ij}-\sum_{R}h_{iR}h_{Rj}\geqslant -n|H|\sqrt{S}-S.$$

因为 $S$ 上方有界，$H$ 为常数，故上式表明 $M^n$ 的 Ricci 曲率下方有界. 对 $S$ 应用引理 4.1 结合(4.1)得

$$0\geqslant(\frac{1}{n}H^2-\sup S)\left[\sqrt{\sup S-\frac{1}{n}H^2+\frac{n-2}{2\sqrt{n(n-1)}}|H|}-\sqrt{\frac{n}{4(n-1)}H^2+n}\right]$$
$$\times\left[\sqrt{\sup S-\frac{1}{n}-H^2+\frac{n-2}{2\sqrt{n(n-1)}}|H|}+\sqrt{\frac{n}{4(n-1)}H^2+n}\right]$$

再由(2.1)得

$$0\geqslant(\frac{1}{n}H^2-\sup S)\left[\sqrt{\sup S-\frac{1}{n}H^2+\frac{n-2}{2\sqrt{n(n-1)}}|H|}-\sqrt{\frac{n}{4(n-1)}H^2+n}\right]\geqslant 0.$$

于是

$$\sup S=\frac{1}{n}H^2 \quad 或 \frac{2}{2(n-1)}H^2-\frac{n-2}{2(n-1)}\sqrt{H^4+4(n-1)H^2}+n.$$

定理 1 证毕.

**推论** 4.1 设 $M^3$ 是单位球面 $S^4(1)$ 中的完备的常平均曲率超曲面. 如果 $S$ 是常数且

$$S\leqslant\frac{3}{4}H^2-\frac{1}{4}\sqrt{H^4+8H^2}+3,$$

则 $S$ 只能等于 $\frac{1}{3}H^2$ 或 $\frac{3}{4}H^2-\frac{1}{4}\sqrt{H^4+8H^2}+3$.

**定理 2 的证明**

将 $(h_{ij})$ 对角化，即 $h_{ij}=\lambda_i\delta_{ij}$. 当 $n=3$，$S$ 为常数时，(3.1)，(3.2)可写成

$$\sum_{i,j,k}h_{ijk}^2=S(S-3)+H^2-Hf_3. \qquad (4.2)$$

$$\frac{1}{2}\Delta\sum_{i,j,k}h_{ijk}^2=(9-S)(S^2-3S+H^2-Hf_3)+\sum_{ijkl}h_{ijkl}^2$$
$$+6\sum_{i,j,k}h_{ijk}^2\lambda_i\lambda_j-3\sum_{i,j,k}h_{ijk}^2\lambda_i^2+3H\sum_{i,j,k}h_{ijk}^2\lambda_i. \qquad (4.3)$$

**引理** 4.2 [1] 设 $M^3$ 是单位球面 $S^4(1)$ 中的常主曲率超曲面数，则 $S$ 只能取 $\frac{1}{3}H^2$，$\frac{3}{4}H^2-\frac{1}{4}\sqrt{H^4+8H^2}+3$，$\frac{3}{4}H^2+\frac{1}{4}\sqrt{H^4+8^2}+3$，$H^2+6$ 这四个数.

若 $f_3$ 是常数，因 $S$，$H$ 都为常数，则 $M^3$ 的主曲率是常数，此种情况包含在引理 4.2 中. 因此，下面只需考虑 $f_3$ 不为常数的情形.

**引理** 4.3 设 $M^3$ 是单位球面 $S^4(1)$ 中的完备的常平均曲率超曲面. 如果 $f_3\neq Const$，$S$ 为常数且

$$\frac{3}{4}H^2-\frac{1}{4}\sqrt{H^4+8H^2}+3<S\leqslant\frac{3}{4}H^2+\frac{1}{4}\sqrt{H^4+8H^2}+3,$$

则必有

$$\inf B_3=-\frac{1}{\sqrt{6}}(S-\frac{1}{3}H^2)^{3/2} \tag{4.4}$$

**证明** 由[1]计算得

$$\frac{1}{3}\Delta\sum_{i,j,k}h_{ijk}^2=2H\sum_{i,j,k}h_{ijk}^2\mu_i-(S-\frac{2}{3}H^2-3)\sum_{i,j,k}h_{ijk}^2$$
$$+(S-\frac{1}{3}H^2)(S-\frac{3}{4}H^2-3+\frac{1}{4}\sqrt{H^4+8H^2})(S-\frac{3}{4}H^2-3-\frac{1}{4}\sqrt{H^4+8H^2}). \tag{4.5}$$

$$\sum_{i,j,kl}h_{ijkl}^2=-\frac{5}{3}\sum_{ijk}h_{i,j,k}^2(\mu_i+\mu_j+\mu_k)^2+8H\sum_{i,j,k}h_{ijk}^2\mu_i$$
$$+\frac{3}{2}(S-\frac{1}{3}H^2)(S-\frac{3}{4}H^2-3+\frac{1}{4}\sqrt{H^4+8H^2})(S-\frac{3}{4}H^2-3-\frac{1}{4}\sqrt{H^4+8H^2})$$
$$+\frac{3}{2}(S-\frac{2}{3}H^2-3)\sum_{i,j,k}h_{ijk}^2. \tag{4.6}$$

由 $\sum_i\lambda_i^2=S$(常数)知$\{\lambda_i\}$有界,从而$\{\mu_i\}$有界. 由(3.4)和(3.6)知 $f_3$ 有界,结合(4.2)可知$\{h_{ijk}\}$有界$(1\leqslant i,k\leqslant 3)$,故我们有

$\lim\limits_{n\to\infty}\mu_i(p_n)=\mu^\circ{}_i$, $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_i(p_n)=\lambda^\circ{}_i$, $\lim\limits_{n\to\infty}h_{ijk}=h^\circ{}_{ijk}$, $(1\leqslant i,j,k\leqslant 3)$(必要时,可以选取共同的子序列). 对 $f_3$ 应用引理 4.1 得,存在点列$\{p_n\}\subset M^3$,使得

$$\lim_{n\to\infty}|df_3(p_n)|=0,\quad \lim_{n\to\infty}\Delta f_3(p_n)\leqslant 0,\quad \lim_{n\to\infty}f_3(p_n)=\sup f_3. \tag{4.7}$$

由(3.4)可得

$$\inf B_3=HS-\frac{2}{9}H^3-\sup f_3.$$

可以断言,$\inf B_3\neq\frac{1}{\sqrt{6}}(S-\frac{1}{3}H^2)^{3/2}$! 若不然,由$\frac{1}{\sqrt{6}}(S-\frac{1}{3}H^2)^{3/2}=\inf B_3\leqslant\sup B_3\leqslant\frac{1}{\sqrt{6}}(S-\frac{1}{3}H^2)^{3/2}$可知道 $\inf B_3=\sup B_3$,即 $B_3$ 是常数,从而 $f_3$ 是常数,这与 $f_3$ 不为常数的假设相矛盾. 又可以断言,$\inf B_3=-\frac{1}{\sqrt{6}}(S-\frac{1}{3}H^2)^{3/2}$! 若不然,$|\inf B_3|<\frac{1}{\sqrt{6}}(S-\frac{1}{3}H^2)^{3/2}$,故 $\mu^\circ{}_1,\mu^\circ{}_2,\mu^\circ{}_3$互不相同,从而 $\lambda^\circ{}_1,\lambda^\circ{}_2,\lambda^\circ{}_3$也互不相同. 因为 $S,H$ 为常数且$\lim\limits_{n\to\infty}|df_3(p_n)|=0$,我们有

$$\sum_i h^\circ{}_{iik}=0,\quad \sum_i h^\circ{}_{iik}\lambda^\circ{}_i=0,\quad \sum_i h^\circ{}_{iik}\lambda^{\circ 2}_i=0,$$

故 $h^\circ{}_{iik}=0(1\leqslant i,k\leqslant 3)$. 于是有

$$\sum_{i,j,k}h^\circ{}_{iik}{}^2(\mu^\circ{}_i+\mu^\circ{}_j+\mu^\circ{}_k)^2=0,\quad \sum_{i,j,k}h^\circ{}_{iik}{}^2\mu^\circ{}_i=0 \tag{4.8}$$

由(3.3)和(4.7)得

$$\lim_{n\to\infty}\Delta\sum_{i,j,k}h^\circ{}_{iik}{}^2(p_n)\geqslant 0\quad(\text{假设 } H>0). \tag{4.9}$$

将(4.8)、(4.9)代入(4.5)得

$$(S-\frac{2}{3}H^2-3)\sum_{i,j,k}h^\circ{}_{ijk}{}^2\leqslant(S-\frac{1}{3}H^2)(S-\frac{3}{4}H^2-3+\frac{1}{4}\sqrt{H^4+8H^2})$$
$$\times(S-\frac{3}{4}H^2-3-\frac{1}{4}\sqrt{H^4+8H^2}). \tag{4.10}$$

将(4.8)代入(4.6)得

$$\sum_{ijkl} h^{\circ}{}_{iikl}{}^2=\frac{3}{2}(S-\frac{2}{3}H^2-3)\sum_{i,j,k} h^{\circ}{}_{ijk}{}^2+\frac{3}{2}(S-\frac{1}{3}H^2)(S-\frac{3}{4}H^2-3+\frac{1}{4}\sqrt{H^4+8H^2})$$
$$\cdot(S-\frac{3}{4}H^2-3-\frac{1}{4}\sqrt{H^4+8H^2}). \tag{4.11}$$

由(4.10)和(4.11)得

$$\sum_{ijkl} h^{\circ}{}_{iikl}{}^2\leqslant 3(S-\frac{1}{3}H^2)(S-\frac{3}{4}H^2-3+\frac{1}{4}\sqrt{H^4+8H^2})$$
$$\cdot(S-\frac{3}{4}H^2-3-\frac{1}{4}\sqrt{H^4+8H^2})\leqslant 0$$

另一方面，设

$$t_{ij}=h_{ijij}-h_{jiji},$$

则 $t_{ij}=(\lambda_i-\lambda_j)(1+\lambda_i\lambda_j)$. 由[2]的计算得

$$\sum_{ijkl} h_{ijkl}^2\geqslant 3\sum_{i\neq j}(h_{ijij}-\frac{1}{2}t_{ij})^2+\frac{3}{4}\sum_{i\neq j}t_{ij}^2,$$

从而有

$$\sum_{ijkl} h^{\circ}{}_{ijkl}{}^2\geqslant\frac{3}{4}\sum_{i\neq j}(\lambda^{\circ}{}_i-(\lambda^{\circ}{}_j)^2(1+\lambda^{\circ}{}_i\lambda^{\circ}{}_j)^2>0.$$

这样就导出了矛盾，故(4.4)式成立. 引理 4.3 证毕.

由引理 4.3 及(4.2)得

$$\sum_{i,j,k} h^{\circ}{}_{ijkl}{}^2=S(S-3)+H^2-H\sup f_3$$
$$=(S-\frac{1}{3}H^2)(\sqrt{S-\frac{1}{3}H^2}-\frac{H}{2\sqrt{6}}+\sqrt{\frac{3}{8}H^2+3})(\sqrt{S-\frac{1}{3}H^2}-\frac{H}{2\sqrt{6}}-\sqrt{\frac{3}{8}H^2+3}).$$

因为 $S>\frac{3}{4}H^2-\frac{1}{4}\sqrt{H^4+8H^2}+3$，故

$$\sqrt{S-\frac{1}{3}H^2}-\frac{H}{2\sqrt{6}}+\sqrt{\frac{3}{8}H^2+3}>0,\quad S>\frac{1}{3}H^2.$$

但 $S\leqslant\frac{3}{4}H^2+\frac{1}{4}\sqrt{H^4+8H^2}+3$，故 $\sqrt{S-\frac{1}{3}H^2}-\frac{H}{2\sqrt{6}}-\sqrt{\frac{3}{8}H^2+3}\leqslant 0$，于是 $\sum_{i,j,k} h^{\circ}{}_{ijkl}{}^2=0$. 故我们有：

$$\sqrt{S-\frac{1}{3}H^2}-\frac{H}{2\sqrt{6}}-\sqrt{\frac{3}{8}H^2+3}=0\quad 或 S=\frac{3}{4}H^2+\frac{1}{4}\sqrt{H^4+8H^2}+3$$

定理 2 证毕.

**定理 3 的证明**

由引理 4.2，我们只需考虑 $f_3$ 不为常数的情形. 我们首先来证明

**引理 4.4** 设 $M^3$ 是单位球面 $S^4(1)$ 中的常数量曲率的完备超曲面，$f_3$ 不为常数. 如果 $S$ 为常数且

$$\frac{3}{4}H^2+\frac{1}{4}\sqrt{H^4+8H^2}+3\leqslant S\leqslant H^2+6,$$

则存在点 $p\in M^3$,使得

$$f_3(p)=HS-\frac{2}{9}H^3\quad 或\ B_3(p)=0.$$

**证明** 若不然,不妨设 $B_3>0$,则有

$$f_3=HS-\frac{2}{9}H^3-B_3<HS-\frac{2}{9}H^3. \tag{4.12}$$

得用定理 2 证明过程中的相同论述有

$h^\circ_{iik}=0\quad(1\leqslant i,k\leqslant 3),\quad \mu^\circ_1,\mu^\circ_2,\mu^\circ_3$互不相同.

由[1]的计算得

$$\begin{aligned}\Delta f_3=&-6\sum_{i,j,k}h_{ijk}^2\mu_i+\frac{7}{2}HS^2+2H^2+2H^3-9SH-3H^3S\\&+\frac{1}{2}H^5-3f_3(S-\frac{2}{3}H^2-3).\end{aligned} \tag{4.13}$$

对 $f_3$ 应用引理 4.1 并结合(4.13)得

$$\begin{aligned}0\geqslant&-6\sum_{i,j,k}h^{\circ}_{ijk}{}^2\mu^\circ_i+\frac{7}{2}HS^2+2H^2+2H^3-9SH-3H^2S+\frac{1}{2}H^5\\&-3\sup f_3(S-\frac{2}{3}H^2-3),\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}6\sum_{i,j,k}h^{\circ}_{ijk}{}^2\mu^\circ_i\geqslant&\frac{7}{2}HS^2+2H^3-9SH-3H^3S+\frac{1}{2}H^5-3(HS-\frac{2}{9}H^3)\\&\times(S-\frac{2}{3}H^2-3)=\frac{1}{2}H(S-\frac{2}{3}H^2)^2>0\quad(假设\ H>0),\end{aligned}$$

另一方面

$$\sum_{i,j,k}h^{\circ}_{ijk}{}^2\mu^\circ_i=6\,h^\circ_{123}{}^2(\mu^\circ_1+\mu^\circ_2+\mu^\circ_3)+3\sum_{i,k}h^\circ_{iik}{}^2\mu^\circ_i=0.$$

这样就导出了矛盾. 引理 4.4 证毕.

其余步骤与[1]的定理 3 相同,定理 3 证毕.

## 参 考 文 献

[1] 孙自琪,$S^4$ 内的常数量曲率的紧致超曲面. 数学年刊,8A(3)1987,273—286.

[2] Peng and Terng, *Minimal hypersurfaces of sphere with constant scalar curvature, seminar on minimal submanifolds*, Edited by E. Bombieri, Annals of Math. Studies, Princeton University Press, 103(1983), 177—198.

[3] ORumura, M., *Hypersurfaces and a Pinching Problem on the second fundamental tensor*, Amer. J. of , Math., 97 (1974)207—213.

[4] S. T. Yau, *Harmonic functions on complete Riemannian manifolds*, Comm. Pure Appl. Math. 28(1975), 201—228.

# Complete Hypersurfaces in $S^4(1)$ with Constant Scalar Curvature

*Sun Huafei*
( Northeast University of Tehnolongy,Shenyang)

## Abstract

Let $M^3$ be a 3-dimensional complete hypersurface in $S^4(1)$ with constant mean curvature and constant scalar curvature. We shall show that if $S \leq H^2 + 6$, then there are only four cases: $S = \frac{1}{3}H^2, \frac{3}{4}H^2 - \frac{1}{4}\sqrt{H^4 + 8H^2} + 3, \frac{3}{4}H^2 + \frac{1}{4}\sqrt{H^2 + 8H^2} + 3, H^2 + 6$. Where $S$ and $H$ denote the square of the length of the second fundamental form of $M^3$ and the mean curvature of $M^3$ respectively.