第12卷第2期 1992年5月
数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol. 12 No. 2 May 1992

Cohn 环与 Grothendieck 群*

王 芳 贵
(南京大学，南京 210008)

在考虑自由模的基元素个数是否为不变量时，文[1]中首先引入了三类 Cohn 环 C_1,C_2,C_3，其中 C_1 类与 C_3 类是特别重要的. 对 C_1 类(IBN)，自由模的基元素个数为不变量. 对 C_3 类有限生成投射模上的满自同态为自同构，对 C_1 类已有一些较好的讨论，本文主要讨论 C_2 类与 C_3 类. 给出一个环同态 $\varphi: R\to S$，我们讨论 S 的 Cohn 性质对 R 的影响. §2 着重考虑了 φ 为满同态的情形. 我们得到，$R\in C_i$ 当且仅当 $R/J(R)\in C_i$，于是得到半完全环是 C_3 环. 在§3 中，我们讨论了一些特殊环的 Cohn 性质与其 Grothendieck 群之间的联系.

本文的环均指有单位元的结合环，模指左模. 对环 R，用 $\mathbf{P}(R)$表示有限生成($f.g.$)投射 R 模范畴，$K_0(R)$表 R 的 Grothendieck 群，$J(R)$表 R 的 Jacobson 根.

§1 Cohn 环及有关结果

定义 1.1 设 R 是环，m、n 是正整数.

(1) 若 $R^m\cong R^n\Rightarrow m=n$，则 R 称 C_1 环. 习惯上也称 R 为 IBN 环. 记为 $R\in C_1$ 或 $R\in$ IBN.

(2) 若 $R^m\cong R^n\oplus K\Rightarrow m\geqslant n$，则 R 称 C_2 环. 记为 $R\in C_2$. 这时有 R^n 的生成系的元素个数必不少于 n.

(3) 若 $R^n\cong R^n\oplus K\Rightarrow K=0$，则 R 称 C_3 环. 记为 $R\in C_3$. 这时 R^n 中 n 个元素的生成系必为 R^n 的基底.

以上三类环总称为 Cohn 环，三类 Cohn 环的相互关系为 $C_3\subsetneq C_2\subsetneq C_1$[1].

由定义，C_3 环上 $f.g.$ 自由模上的满自同态为自同构. 这很容易推广为 $f.g.$ 投射模上的满自同态为自同构. 事实上，设 $P\in\mathbf{P}(R)$，$h: P\to P$ 为满自同态. 取 $P\oplus Q=R^n$，$g=h\oplus 1: R^n\to R^n$ 知 $\ker h=\ker g=0$.

我们也可用 $K_0(R)$来刻划 Cohn 环.

命题 1.1 (1) $R\in C_1\Leftrightarrow 0([R])=\infty$[3]

(2) $R\in C_2\Leftrightarrow([K]=m[R]\Rightarrow m\geqslant 0)$.

(3) $R\in C_3\Leftrightarrow([K]=0\Rightarrow K=0)$.

定义 1.2 设 $\mathbf{C}$、$\mathbf{D}$ 是两个模范畴，函子 $F:\mathbf{C}\to\mathbf{D}$ 叫忠实函子，如果 $F(X)=0\Rightarrow X=0$.

---

* 1990年6月16日收到，国家自然科学基金资助项目.

命题 1.2　设 $\varphi: R \to S$ 是环同态，则

(1)　$S \in C_i (i=1$ 或 $2) \Rightarrow R \in C_i$.

(2)　若 $S \bigotimes_{\varphi} - : \mathbf{P}(R) \to \mathbf{P}(S)$ 是忠实函子，则 $S \in C_3 \Rightarrow R \in C_3$.

证明　(2)　$S \in C_3, R^n \cong R^n \oplus K \Rightarrow S^n \cong S^n \oplus (S \bigotimes_{\varphi} K) \Rightarrow S \bigotimes_{\varphi} K = 0 \Rightarrow K = 0 \Rightarrow R \in C_3$.

当 φ 是单同态或 S_R 是忠实平坦模时，则 $S \bigotimes_{\varphi} -$ 是忠实函子. 我们又有

推论 1.3　若 $\varphi: R \to S$ 是单同态，则 $S \in C_i (1 \leqslant i \leqslant 3) \Rightarrow R \in C_i$. 特别地，若 R 是 S 的子环，则 $S \in C_i (1 \leqslant i \leqslant 3) \Rightarrow R \in C_i$.

推论 1.4　设 Λ 是可换环，R、S 是 Λ-代数.

(1)　$R \bigotimes_{\Lambda} S \in C_i (i=1$ 或 $2) \Rightarrow R, S \in C_i$.

(2)　若 R 是忠实平坦 Λ-模，则 $R \bigotimes_{\Lambda} S \in C_3 \Rightarrow S \in C_3$. 特别地，若 Λ 是域，则 $R \bigotimes_{\Lambda} S \in C_3 \Rightarrow R, S \in C_3$.

由于 $K_0(R) \cong K_0(M_n(R))$ 及 C_2 环类与 C_3 环类均为 Morita 不变量[2]，故有

命题 1.5　若 $R \in C_i (1 \leqslant i \leqslant 3)$，则对任何 $n > 0$，$M_n(R) \in C_i$.

设 $R = R_1 \times R_2$，则每一投射 R_i-模$(i=1,2)$均为投射 R-模，而且每一投射 R-模 P 可表示为 $P = P_1 \oplus P_2$，P_i 是投射 R_i-模$(i=1,2)$[3].

命题 1.6　设 $R = R_1 \times R_2$，则

(1)　$R \in C_2 \Leftrightarrow R_1 \in C_2$　或者 $R_2 \in C_2$.

(2)　$R \in C_3 \Leftrightarrow R_1 \in C_3$　且 $R_2 \in C_3$.

证明　(1)　若 $R \in C_2$，$R_1^{m_1} \cong R_1^{n_1} \oplus K_1$，$R_2^{m_2} \cong R_2^{n_2} \oplus K_2$. 设 $m = m_1 + m_2$，$t = min(n_1 + m_2, n_2 + m_1) \Rightarrow R^m \cong R^t \oplus (R_1^{n_1 + m_2 - t} \oplus R_1^{n_2 + m_1 - t} \oplus K_1 \oplus K_2) \Rightarrow m \geqslant t \Rightarrow$ 当 $t = n_1 + m_2$ 时，$m_1 \geqslant n_1$，$R_1 \in C_2$. 而当 $t = n_2 + m_1$ 时，$m_2 \geqslant n_2$，$R_2 \in C_2$.

反之，设 $R_1 \in C_2$. 考虑射影 $p_1: R \to R_1$，由命题 1.2，$R \in C_2$.

(2)　设 $R \in C_3$，$R_1^n \cong R_1^n \oplus K_1 \Rightarrow R^n \cong R^n \oplus K_1 \Rightarrow K_1 = 0 \Rightarrow R_1 \in C_3$. 同理，$R_2 \in C_3$.

反之，设 $R_1 \in C_3$，$R_2 \in C_3$，若 $R^n \cong R^n \oplus K \Rightarrow K = K_1 \oplus K_2$，$K_1 \in \mathbf{P}(R_1)$，$K_2 \in \mathbf{P}(R_2) \Rightarrow R_1^n \cong R_1^n \oplus K_1, \Rightarrow K_1 = 0$. 同理 $K_2 = 0 \Rightarrow K = 0 \Rightarrow R \in C_3$.

§2　Cohn 环　之　商　环

设 $\varphi: R \to S$ 是环同态，则 φ 可分解为 $\varphi = \bar{\varphi}\pi$，其中 $\pi: R \to \bar{R} = R/\ker\varphi$，$\bar{\varphi}: \bar{R} \to S$. π 是满同态，$\bar{\varphi}$ 是单同态. 当 $S \in C_i$ 时，由推论 1.3，$\bar{R} \in C_i$. 故在考虑是否有 $R \in C_i$ 时，总可假设 φ 是满同态.

设 I 是 R 的理想，$\bar{R} = R/I$，对 $P \in \mathbf{P}(R)$，$\bar{P} = \bar{R} \bigotimes_{\pi} P = P/IP$.

定义 2.1　R 的理想 I 叫 Nakayama 理想，如果对任何 $P \in \mathbf{P}(R)$，$IP = P \Rightarrow P = 0$.

易见，若 $I \leqslant J(R)$，则 I 是 Nakayama 理想.

设 $R[X]$是 R 上未定元为 X 的多项式环. 则理想(X)是 Nakayama 理想，事实上，若 S 是以 $e_1, \cdots, e_m$ 为基底的自由 $R[X]$-模，$0 \neq K$ 是 S 的子模. 若 $XK = K$，对 $0 \neq u \in K$，$u = \sum_{i=1}^{m} f_i(X) e_i$，$f_i$

$(X)\in R[X]$. 令 $\sigma(u)=\min\limits_{i\leqslant i\leqslant m}\deg f_i$, $\Rightarrow\sigma(u)\geqslant 0$. 取 $u\in K$, 使得 $\sigma(u)=n=\min\limits_{0\neq v\in K}\sigma(v)$. 由 $XK=K\Rightarrow$ 有 $v\in K$, 使得 $u=Xv$. 设 $v=\sum\limits_{i=1}^{m}h_i(X)e_i\Rightarrow f_i(X)=Xh_i(X)\Rightarrow\deg h_i=\deg f_i-1\Rightarrow\sigma(v)=n-1<\sigma(u)$ $\Rightarrow v=0\Rightarrow u=0$,, 矛盾. $\Rightarrow XK\neq K$.

类似地, 若 $R\{X\}$ 是 R 上以 X 为未定元集为自由环, 则理想 $(\{X\})$ 也是 Nakayama 理想. 从而 Nakayama 理想不一定含于 Jacobson 根之中.

命题 2.1　设 I 是 R 的 Nakayama 理想, 则 $\bar{R}\in C_3\Rightarrow R\in C_3$.

证明　设 $R^n\subsetneqq R^n\oplus K\Rightarrow\bar{R}^n\subsetneqq\bar{R}^n\oplus\bar{K}\Rightarrow\bar{K}=0\Rightarrow IK=K\Rightarrow K=0\Rightarrow R\in C_3$.

推论 2.2　$R\in C_i\Leftrightarrow R[X]\in C_i\Leftrightarrow R\{X\}\in C_i$　$(1\leqslant i\leqslant 3)$.

[9]中指出, 每一环都是一个 C_1 环的同态象. 更进一步, 我们有

推论 2.3　每一环都是一个 C_3 环的同态象.

证明　设 R 是任何环, 总可认为 R 是 $\mathbf{Z}$-代数, 从而 R 是一个自由代数 $\mathbf{Z}\{X\}$ 的同态象. 由推论 2.2, $\mathbf{Z}\{X\}\in C_3$.

在[1]中已指出, 交换环与 Noether 环都是 C_3-环. 若 R 是半完全环, 则 $R/J(R)$ 是半单环, 从而是 Noether 环, 故 $R/J(R)\in C_3$, 从而 $R\in C_3$. 即

定理 2.4　半完全环是 C_3-环.

定理 2.5　设 $I\leqslant J(R)$, 则 $R\in C_2\Leftrightarrow\bar{R}\in C_2$.

证明　设 $R\in C_2$, $f:\bar{R}^m\to\bar{R}^n$ 是满同态. $\pi: R^n\to\bar{R}^n$ 是自然同态 $\Rightarrow\bar{R}^n$ 有一个生成系为 $\{\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_m\}$, $x_i\in R^n$, $i=1,\cdots,m$. 设 $F=Rx_1+\cdots+Rx_n\Rightarrow R^n=F+IR^n\Rightarrow F=R^n$. 即 $x_1,\cdots,x_m$ 是 R^n 的生成系, $R\in C_2\Rightarrow m\geqslant n$. $\Rightarrow\bar{R}\in C_2$.

反之由命题 1.2 导出.

定理 2.6　设 $I\leqslant J(R)$, 则 $R\in C_3\Leftrightarrow\bar{R}\in C_3$.

证明　设 $R\in C_3$, $f:\bar{R}^n\to\bar{R}^n\oplus K$ 是同构. 设 $p:\bar{R}^n\oplus K\to\bar{R}^n$ 是射影映射, $\pi: R^n\to\bar{R}^n$ 是自然映射. 则 $\varphi=pf\pi: R^n\to\bar{R}^n$, 且 $\ker\varphi=IR^n$. 设 $x_1,\cdots,x_n\in R$, 使得 $\varphi(x_1),\cdots,\varphi(x_n)$ 是 $\bar{R}^n$ 的基底, $F=Rx_1+\cdots+Rx_n$, $\Rightarrow F+IR^n=R^n\Rightarrow F=R^n$, $R\in C_3\Rightarrow x_1,\cdots,x_n$ 是 R^n 的基底 $\Rightarrow\bar{\varphi}=pf:\bar{R}^n\to\bar{R}^n$ 是同构. f 是同构 $\Rightarrow p$ 也是同构 $\Rightarrow\ker p=0\Rightarrow\bar{R}\in C_3$.

注　若 $I\leqslant J(R)$, 则 $R\in C_1\Leftrightarrow\bar{R}\in C_1$. 参见[5]

推论 2.7　若 I 是 R 的诣零理想, 则 $R\in C_i\Leftrightarrow\bar{R}\in C_i(1\leqslant i\leqslant 3)$.

推论 2.8　若 R 是 I 级完备环, 则 $R\in C_i\Leftrightarrow\bar{R}\in C_i(1\leqslant i\leqslant 3)$.

注　在推论 2.7 与 2.8 的条件下, 还有 $K_0(R)\cong K_0(\bar{R})$, 参见([6], Th. 22.15).

命题 2.9　若对 R 的任何有限生成理想 $J\leqslant I$, 有 $R/J\in C_i(1\leqslant i\leqslant 3)$, 则 $\bar{R}=R/I\in C_i$.

证明　由于 $I=\varinjlim(J\leqslant I\mid J$ 有限生成$\}$, 故 $\bar{R}=\xrightarrow[J]{lim}R/J\in C_i$.

§3　几类特殊环 Cohn 性质及其 K_0 群

先给出一些定义.

定义 3.1　设 $P\in\mathbf{P}(R)$. 如果对某个 $m>0$, P^m 是准自由模, 则 P 称弱准自由模. 如果 P^m

还是自由模,则 P 称弱自由模.

定义 3.2　若 $\mathbf{P}(R)=\{$弱准自由模$\}$(分别地,$\mathbf{P}(R)=\{$准自由模$\}$,$\mathbf{P}(R)=\{$弱自由模$\}$,$\mathbf{P}(R)=\{f.g.$ 自由模$\}$),则 R 称为 PWSF 环(分别地,PSF 环,PWF 环,PF 环),记为 $R\in$ PWSF(分别地,$R\in$ PSF,$R\in$ PWF,$R\in$ PF).

定理 3.1　(1)　P 是准自由模$\Leftrightarrow$在 $K_0(R)$中,$[P]=n[R]$,$n\in Z$.

(2)　P 是弱准自由模$\Leftrightarrow$在 $K_0(R)$中,$m[P]=n[R]$,$m\neq0$,$m,n\in Z$.

(3)　$R\in$ PSF$\Leftrightarrow K_0(R)$是以$[R]$为生成元的循环群.

(4)　若 $K_0(R)$是循环群且$[R]\neq0$,则 $R\in$ PWSF.

(5)　若 $K_0(R)$是有限阶循环群,则 $R\in$ PWSF.

证明　(1),(2),(3)的成立是显然的.

(4)　设 $x=[T]-[R^t]$是 $K_0(R)$的生成元$\Rightarrow 0\neq[R]=m[T]-mt[R]$,$m\neq0\Rightarrow\forall\ P\in\mathbf{P}(R)$,$[P]=n[T]-nt[R]\Rightarrow m[P]=mn[T]-mnt[R]=n[R]\Rightarrow P$ 是弱准自由模$\Rightarrow R\in$ PWSF.

(5)　若$[R]\neq0$,由(4),$R\in$ PWSF. 今设$[R]=0$. 设$[T]$的阶为 $m>0$,则对任何 $P\in\mathbf{P}(R)$,$m[P]=0=[R]\Rightarrow P$,是弱准自由模$\Rightarrow R\in$ PWSF.

命题 3.2　若 $R\in PF\Rightarrow$对任何 $n>1$,$S=M_n(R)\in$ PWF.

证明　设　${}_RM_S=R^n$,　${}_SN_R=(R^n)^*\Rightarrow N\underset{R}{\otimes}M\cong S$,$M\underset{S}{\otimes}N\cong R\Rightarrow\forall\ P\in\mathbf{P}(S)$,$P\cong N\underset{R}{\otimes}M\underset{S}{\otimes}P$. $R\in PF$,可设 $M\underset{S}{\otimes}P\cong R^m\Rightarrow P\cong N\underset{R}{\otimes}R^m\cong N^m$,但 $N^n\cong S$,即 N 是弱自由模$\Rightarrow P$ 是弱自由模. $\Rightarrow S\in$ PWF.

注　易见 $n>1$ 时,N 不是自由模,故 $S\bar{\in}PF$.

例 1　设 Λ 为域,$n>1$,$R=M_n(\Lambda)$,则 $R\in$ PWF,从而 $R\in$ PWSF,但 $R\bar{\in}$ PSF,$R\bar{\in}$ PF. 故 PWSF$\nRightarrow$PSF,PWF$\nRightarrow$PF,注意到准自由 R-模还是自由模,故准自由模不一定是弱自由模. 弱自由模也不一定是准自由模.

例 2　PWSF$\nRightarrow$PWF. 这里,我们取 $R=\mathbf{Z}\oplus M_\infty(Q)$,则 $K_0(R)=\mathbf{Z}$,$[R]\neq0$,故 $R\in$ PWSF. 但 $P=M_\infty(Q)\in\mathbf{P}(R)$,$P$ 不是弱自由模,故 $R\bar{\in}$PWF.

我们便得到下面的含关系:$\{$弱准自由模$\}\subsetneqq\{$准自由模$\}\subsetneqq\{f.g.$ 自由模$\}$,$\{$弱准自由模$\}\subsetneqq\{$弱自由模$\}\subsetneqq\{f.g.$ 自由模$\}$;PF$\underset{\nLeftarrow}{\Rightarrow}PWF\underset{\nLeftarrow}{\Rightarrow}$PWSF,PF$\underset{\nLeftarrow}{\Rightarrow}PSF\underset{\nLeftarrow}{\Rightarrow}$PWSF.

定理 3.3　设 $R\in$ PSF,则 $K_0(R)=\mathbf{Z}\Leftrightarrow R\in C_1$.

证明　由定理 3.1 与命题 1.1 即知.

例 3　$R\in$ PSF$\nRightarrow R\in C_1$,从而 $R\in$ PSF$\nRightarrow K_0(R)=\mathbf{Z}$. 取 Λ 为域,V 是 Λ 上的无限维向量空间,$R=\mathrm{End}_\Lambda V$,$\Rightarrow R\bar{\in}C_1$. 但 $K_0(R)=0$[3],由定理 3.1(3),$R\in$ PSF.

定义 3.3　若$\{$准自由模$\}\subseteq\{$弱自由模$\}$,则 R 称 SW 环,记为 $R\in SW$.

当 R 可换时,准自由模必为弱自由模(Gabel 定理),故 $R\in SW$.

定理 3.4　设 $R\in SW$,则 $R\in C_1\Leftrightarrow R\in C_3$.

证明　若 $R\in C_1$,$R^n\cong R^n\oplus P\Rightarrow$存在 $m,t\geqslant0$,$P^m\cong R^t\Rightarrow R^{mn}\cong R^{mn}\oplus P^m\cong R^{mn+t}\Rightarrow mn=mn+t\Rightarrow t=0\Rightarrow P=0\Rightarrow R\in C_3$.

推论 3.5　(Cohn)设准自由模是自由模,即 $R\in SF$,则 $R\in C_1\Leftrightarrow R\in C_3$.

定理 3.6　设 $R\in$ PWF,则 $K_0(R)=\mathbf{Z}\Rightarrow R\in C_1\Rightarrow R\in C_3$.

证明 $K_0(R)=\mathbf{Z}\Rightarrow[R]=0$ 或者 $0[R]=\infty$. 若$[R]=0,\forall\ P\in\mathbf{P}(R),P^m\cong R^t,m>0,t\geqslant 0\Rightarrow m[P]=t[R]=0\Rightarrow[P]=0\Rightarrow K_0(R)=0$,矛盾. $\Rightarrow 0[R]=\infty\Rightarrow R\in C_1$. $R\in$ PWF$\Rightarrow R\in SW\Rightarrow R\in C_3$.

推论 3.7 设 $R\in PF$,则 $K_0(R)=\mathbf{Z}\Leftrightarrow R\in C_3$.

证明 由定理 3.3 及 3.6 即得.

定理 3.8 设 $K_0(R)=\mathbf{Z}$,则 $R\in C_1\Leftrightarrow R\in$ PWSF.

证明 若 $R\in C_1$,由定理 3.1(4)$\Rightarrow R\in$ PWSF,反之,若 $R\in$ PWSF,$K_0(R)=\mathbf{Z}\Rightarrow[R]=0$ 或者 $0[R]=\infty$. 若$[R]=0\Rightarrow\forall\ P\in\mathbf{P}(R)$有,$m[P]=n[R]=0,m>n\Rightarrow[P]=0\Rightarrow K_0(R)=0$,矛盾$\Rightarrow 0[R]=\infty\Rightarrow R\in C_1$.

定理 3.9 设 $R\in$ PSF,$K_0(R)=\mathbf{Z}$,则 $R\in C_3\Leftrightarrow R\in$ PWF.

参 考 文 献

[1] Cohn, P. M. *Some remarks on their invariant basis property*, Topology, 5(1966), 215—228.

[2] 徐岩松,关于 K_0 群的挠子群的一个注记,南京大学学报数学半年刊,2(1985),216—217.

[3] Silvester, J. R. *Introduction to Algebraic K—Theory*, 1981.

[4] 王芳贵,本原环的 Grothendieck 群,数学学报.

[5] 王芳贵,IBN 环的遗传性质,南京大学学报数学半年刊,1(1990).

[6] Faith, C. Algebra Ⅱ, 1976.

[7] Rotma, J. J, *An Introduction to Homological Algebra*, 1979.

[8] Beck, I. , *Projective and free modules*, Math. 2, 129(1972), 231—234.

[9] 徐岩松,IBN 环与张量积,南京大学学报,21(1985),571—576.

Cohn Rings and Their Grothendieck Groups

Wang Fanggui

(Nanjing University, 210008)

Abstract

We introduce three classes of cohn rings C_1, C_2 and C_3). Let R and S are rings,$\phi: R\to S$ is a ring homomorphism. We prove that $R\in C_i$ if and only if $R/J(R)\in C_i$. In We also discuss the relation between the $PWSF(PSF, PWF$ and PF,respectively) rings and their grothendieck groups. The following results are obtained:

(1) If $R\in PSF$,then $R\in C_1\Leftrightarrow K_0(R)=\mathbf{Z}$.

(2) If $R\in SW$, then $C_1\Leftrightarrow C_3$. Therefore, if $R\in PF$, then $R\in C_3\Leftrightarrow K_0(R)=\mathbf{Z}$.

(3) If $K_0(R)=\mathbf{Z}$, then $R\in C_1\Leftrightarrow R\in PWSF$.