第12卷第2期　　数学研究与评论　　vol. 12 No. 2
1992年5月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　May 1992

标准完全分配格的代数结构*

史 福 贵
(牡丹江师范学院数学系 157422)

在格上拓扑学中，格上的拓扑结构与格的代数结构有着密切的关系，因此弄清各种格的代数结构是非常必要的．文[1]曾引入了标准的广义拓扑分子格的概念，其中的格是Fuzzy格，分子依赖于格上的拓扑．本文以完全分配格取代[1]中的Fuzzy格，以完全分配格中的非零并一既约元(也称分子[2])取代[1]中的分子，引入了标准完全分配格，讨论了它中元是并一既约元的等价条件及标准完全分配格的等价刻画．证明了如果一个标准完全分配格的极大点彼此不交，那么它必同构于若干全序完备链的直积格．

本文L总表示一个完全分配格，其最大元与最小元分别记为1与0且$1\neq 0$. M表示L中全体非零并一既约元之集．对于$a\in L$，以$\downarrow a$表示a的下集．$m\in M$叫$A\in L$的一个成分，如果 (i)$m\leqslant A$，　(ii)若$m'\in M$且$m\leqslant m'\leqslant A$则$m=m'$. L的最大元1的成分叫L的极大点，L的全体极大点之集记为M^*．由[2]中命题4.11可知$\forall a\in M$，L中至少有一个包含a的极大点，若L的极大点彼此不交，则L中有唯一的极大点包含a．对$a\in L$，非空集$B\subset L$叫做a的极小集，如果　(i)$\mathrm{Sup}B=a$，　(ii)$\forall A\subset L$，若$\mathrm{Sup}A\geqslant a$，则$\forall x\in B$，存在$y\in A$使得$y\geqslant x$.

定义　完全分配格L称为标准的，如果$a\in M$，$A\in L$且$a\wedge A\neq 0$时，$a\wedge A\in M$.

定理1.　若L是标准的，$a\in L$且$a\neq 0$，则下列诸条件等价

(1)　$a\in M$

(2)　$\downarrow a\backslash_0\subset M$

(3)　$\downarrow a$是全序的

(4)　a的每个极小集是全序的

(5)　a的某个极小集是全序的

证明　(1)⇒(2)设$a\in M$且$x\in\downarrow a\backslash_0$，则由$L$是标准的且$a\wedge x=x\neq 0$可知$x\in M$.

(2)⇒(3)设$x,y\in\downarrow a\backslash_0$，则$x\vee y\in\downarrow a\backslash_0\subset M$，于是或有$x\vee y\leqslant x$或有$x\vee y\leqslant y$，从而或$y\leqslant x$或$x\leqslant y$，即$\downarrow a\backslash_0$是全序的．当然$\downarrow a$也是全序的.

(3)⇒(4)若$\downarrow a$是全序的，则由$\downarrow a$包含a的每个极小集可知(4)成立.

(4)⇒(5)是明显的.

(5)⇒(1)由[3]中定理2可得.

引理.　设$a,b\in L$且$a\geqslant b$，若b有一个极小集B，则a必有一个极小集A使$B\subset A$.

* 1990年5月17日收到.

证明. 设 A_1 是 a 的任一极小集,令 $A=A_1\cup B$. 下证 A 是 a 的一个极小集.

(i) 显然 $\mathrm{Sup}A=a$.

(ii) 设 $C\subset L$, 且 $\mathrm{Sup}C\geqslant a$, $\forall x\in A$, $x\in A_1$ 或 $x\in B$, 若 $x\in A_1$, 则由极小集的定义可知存在 $y\in C$ 使 $y\geqslant x$, 若 $x\in B$, 则由 $\mathrm{Sup}C\geqslant b$ 与 B 是 b 的一个极小集可知仍有 $y\in C$ 使 $y\geqslant x$. 证毕.

定理 2. 下列诸条件是彼此等价的.

(1) L 是标准的

(2) $\forall a\in M$, $\downarrow a\backslash_0\subset M$

(3) $\forall a,b\in M$, 若 a,b 不可比, 则 a 与含 b 的极大点也不可比.

(4) $\forall a,b\in M$, 若 a,b 不可比, 则包含它们的极大点也不可比.

(5) $\forall m\in M^*$, $\downarrow m$ 是全序的.

(6) $\forall a\in M$, $\downarrow a$ 是全序的.

(7) $\forall a\in M$, a 的每个极小集是全序的.

证明 (1)⇒(2) 由定理 1 可得.

(2)⇒(3) 设 $a,b\in M$, 且 a,b 不可比. 假如有一个含 b 的极大点 $m\in M^*$ 使得 $a\leqslant m$, 则 $a\vee b\in\downarrow m\backslash_0$, 于是由 $\downarrow m\backslash_0\subset M$ 可知 $a\vee b\in M$. 从而或有 $a\vee b\leqslant a$ 或有 $a\vee b\leqslant b$, 即或 $b\leqslant a$ 或 $a\leqslant b$. 这与 a,b 不可比相矛盾. 因此 $a\nleqslant m$, 显然 $a\ngeqslant m$, 故 a 与含 b 的每个极大点都不可比.

(3)⇒(4) 显然.

(4)⇒(5) 设 $m\in M^*$, $x,y\in M$ 且 $x,y\in\downarrow m$. 则 m 是包含 x 和 y 的极大点, 由(4)的条件可知 x 与 y 可比, 这表明 $\downarrow m$ 中的全体分子之集是全序的. 由[3]中命题 1 可知 $\downarrow m$ 中的任一元必是分子, 从而 $\downarrow m$ 是全序的.

(5)⇒(6) 显然.

(6)⇒(7) 由于 $\downarrow a$ 包含 a 的每个极小集, 所以这也是明显的.

(7)⇒(1) 设 $a\in M$, $A\in L$ 且 $a\wedge A\neq 0$, 由引理知 $a\wedge A$ 有一个极小集含于 a 的某个极小集中, 因此 $a\wedge A$ 的这个极小集是全序的, 从而由[3]中命题 1 可知 $a\wedge A\in M$. 证毕.

定理 3 若 L 是标准的且其极大点彼此不交, 则 L 同构于若干全序完备链的直积格.

证明 设 $L_m=\downarrow m$, 这里 $m\in M^*$, 则 L_m 是 L 的一个全序完备子格且 $m_1\neq m_2$ 时, $L_{m_1}\cap L_{m_2}=\{0\}$. 定义对应 $f: L\to\prod\limits_{m\in M^*}L_m$ 如下, $\forall a\in L$,

$$f(a)\triangleq\{a\wedge m\}_{m\in M^*}$$

显然 f 是 L 到 $\prod\limits_{m\in M^*}L_m$ 的一个映射.

(1) 若 $A,B\in L$ 且 $f(A)=f(B)$, 则 $\forall m\in M^*$, $A\wedge m=B\wedge m$, 于是 $\bigvee\limits_{m\in M^*}(A\wedge m)=\bigvee\limits_{m\in M^*}(B\wedge m)$, 而 $\bigvee\limits_{m\in M^*}m=1$, 因此 $A=B$. f 是一一的.

(2) 设 $\{X_m\}_{m\in M^*}$ 是 $\prod\limits_{m\in M^*}L_m$ 中的任一元, 这里 $X_m\in L_m$, 则 $X_m\leqslant m$ 且 $\bigvee\limits_{m\in M^*}X_m\in L$. 因为

$$f(\bigvee_{m\in M^*}X_m)=\{(\bigvee_{m\in M^*}X_m)\wedge m\}_{m\in M^*}=\{\bigvee_{m'\in M^*}(X_{m'}\wedge m)\}_{m\in M^*}=\{X_m\}_{m\in M^*}$$

所以 f 是满射.

(3) 设 $\{A_i\}_{i\in\Omega}\subset L$, 则 $f(\bigvee\limits_{i\in\Omega}A_i)=\{(\bigvee\limits_{i\in\Omega}A_i)\wedge m\}_{m\in M^*}=\{\bigvee\limits_{i\in\Omega}(A_i\wedge m)\}_{m\in M^*}=\{\bigvee\limits_{i\in\Omega}\{A_i\wedge m\}_{m\in M^*}$

$= \bigvee_{i \in \Omega} f(A_i)$

故 f 是保并映射. 同理可证 f 也是保交.

综上可知 f 是一个同构映射,证毕.

参 考 文 献

[1] 王国俊,广义拓扑分子格,中国科学,A 辑,12(1983),1063—1072.

[2] 王国俊,完全分配格上的点式拓扑(I),陕西师大学报(自然科学版),1(1985),1—17.

[3] 彭育威,完全分配格的并一既约元的性质及分子格的代数结构,工程数学学报,2(1985),113—117.

Algebraic Structure of Canonical Completely Distributive Lattice

Shi Fugui

(Mudanjiang Teachers' College)

Abstract

In this paper we give some equivalent characterizations of a canonical completely distributive lattice and some equivalent conditions for a non-zero element to be a joint irreducible element. We also prove that a canonical completely distributive lattice without two intersecting maximal points is isomorphic to the Cartesian product of some totally complete chains.