第12卷第3期　　数学研究与评论　　Vol. 12 No. 3
1992年8月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Aug. 1992

关于Lašnev空间*

刘 川
(广西大学数学系，南宁 530004)

摘 要

本文给出了Lašnev空间的几个刻画，推广了[2]中的定理.同时在实质上改进了Hanai—Morita. A. H Stone及Hyman的结论，并回答了[3]中的一个问题.

Lašnev空间(度量空间的闭像)是一类重要的广义度量空间，Lašnev，Foged，Hung等人在这类空间的刻画上取得了较好的成果，林寿在Lašnev空间的乘积问题上也取得了一些结论.本文在Lašnev空间的刻画上推广Hung的定理，并且同时得到一些有趣的结论.

本文所讨论的空间均为正则T_1空间，所用符号，术语，定义均以[1]为准.所有映射都是连续到上的.

定义1　设X为拓扑空间，$\mathscr{P}$为X的集族，若对于$\mathscr{P}$中的任意可数子族$\{P_i:i\in N\}$，有

$$\overline{\bigcup_{i\in N}\{x_i:x_i\in P_i\}}=\bigcup_{i\in N}\overline{\{x_i:x_i\in P_i\}},$$

则称$\mathscr{P}$为可数弱遗传闭包保持族，简记为CWP族.若$\mathscr{P}=\bigcup_n\mathscr{P}_n$，对$n\in N$. $\mathscr{P}_n$为CWP族，则$\mathscr{P}$称为σ—CWP族.

定义2　称$f:X\to Y$为遗传闭包保持(简记为HCP)映射，若$\mathscr{P}$为X的HCP族，则$f(\mathscr{P})$为Y的HCP族.

定义3　X称为k—半分层空间，若X有一σ-胶垫对k—网.

命题1　Lašnev空间是k—半分层空间，且有点可数k—网.

证明　Foged[4]证明了X是Lašnev空间的充分必要条件是X为Fre′chet空间且有一σ-HCP k—网. Tanaka[5]命题1.8证明了有σ—HCP k—网的空间有点可数k—网.从定义易知有σ—HCP k—网的空间是k—半分层空间.

注意到k—半分层空间和有点可数k—网的空间都是可数可乘的，我们有

引理2　设$X_i(i\in N)$为k—半分层空间且有一点可数k—网，则$\prod_{i\in N}X_i$为k—分层空间且有一点可数k—网.

定理3　设X为强Fre′chet的k—半分层空间且有一点可数k—网，则X可度量化.

证明　由[6]推论3.6，X有点可数基(注意强Fre′chet空间是可数bi—k空间)，而第一可

* 1990年9月27日收到.

数的 k—半分层空间是分层空间，由[1]推论 7.11，X 可度量化.

推论 4[Hanai—Morita. H. Stone]　满足第一可数公理的 Lašnev 空间是可度量化的.

注　由于林寿[7]证明了有 σ—HCP k—网的空间不具有有限可乘性，再由引理 2 可知：有 σ—HCP k—网的空间严格强于 k—半分层且有点可数 k—网的空间，因此定理 3 从实质上改进了推论 4.

定理 5　设 X,Y 为 k—半分层空间且有一点可数 k—网，若 $X\times Y$ 为 Fre′chet 空间，则① X 或 Y 是离散空间或② X,Y 都是可度量化的.

证明　由[8]定理 9.2 可知：若 $X\times Y$ 为 Fre′chet 空间，则 X 为强 Fre′chet 空间或 Y 为离散空间，若 X,Y 均不为离散空间，则 X,Y 均为强 Fre′chet 空间，由定理 3，X,Y 为可度量化的.

推论 6[Hyman]　设 X,Y 不是离散空间，若 $X\times Y$ 为 Lašnev 空间，则 X,Y 可度量化.

定理 7　设 $X_i(i\in N)$ 为 k—半分层空间且有一点可数 k—网，则 $\prod_{i\in N}X_i$ 的任一强 Fre′chet 子空间可度量化.

证明　由引理 2，$\prod_{i\in N}X_i$ 为 k—半分层空间且有一点可数 k—网，再由于 k—半分层空间及具有点可数 k—网的空间是遗传的，故 $\prod_{i\in N}X_i$ 的任一子空间为 k—半分层空间且有一点可数 k—网，由定理 3 则定理成立.

Nogura[3]问(问题 3.12)：两个 Lašnev 空间乘积的强 Fre′chet 子空间是否可度量？回答是肯定的.

推论 8　可数多个 Lašnev 空间的乘积的强 Fre′chet 子空间是可度量化的.

注　林寿也回答了这个问题.

定理 9　对于拓扑空间 X，下列命题等价：

① X 为 Lašnev 空间.

② X 为度量空间在伪开 HCP 映射下的像.

证明　①→②显然.

②→①. 设 $f:M\to X$ 为伪开 HCP 映射，M 为度量空间. 则 X 为 Fre′chet 空间，设 $\mathscr{B}$ 为 M 的一 σ—HCP 基，则 $f(\mathscr{B})$ 是 X 的 σ—HCP 族，显然 $f(\mathscr{B})$ 为 X 的 σ—HCP 网络，故 X 为 σ—空间，由[5]引理 1.6(1)及命题 1.2(2)，则 $f(\mathscr{B})$ 为 σ—HCP k—网. 故 X 为 Lašnev 空间.

定理 10　对于拓扑空间 X，下列命题等价.

① X 为 Lašnev 空间.

② X 为 Fre′chet 空间，对 $n\in N$，$\mathscr{P}_n$ 为 X 的划分，且 $\mathscr{P}_{n+1}$ 加细 $\mathscr{P}_n$，$\mathscr{P}=\bigcup_n\mathscr{P}_n$ 满足：

设 $x_n\to x\in U$(开集)则存在 $P\in\mathscr{P}$，使 $P\subset U$，P 含有 $\{x_n:n\in N\}$ 的子列.　　(＊)

③ X 为 Fre′chet 空间，对 $n\in N$，$\mathscr{P}_n$ 为 X 的星有限复盖，$\mathscr{P}_{n+1}$ 加细 $\mathscr{P}_n$，且 $\mathscr{P}=\bigcup_n\mathscr{P}_n$ 满足(＊).

④ X 为 Fre′chet 空间，且有一 σ—CWP k—网.

证明　①→②.　见[2]中定理的必要性证明.

②→③. 显然.

③→①.

论断 1　$\mathscr{P}=\bigcup_n \mathscr{P}_n$ 为 X 的 k—网.

由[5]推论 1.5,则 $\mathscr{P}=\bigcup_n \mathscr{P}_n$ 为 X 的 k—网.

论断 2　$x_n \to x_0$,记 $\langle x_i\rangle=\{x_0\}\cup\{x_n:n\in N\}$ 对 $n\in N$,则 $|\{P:P\in\mathscr{P}_n,P\cap\langle x_i\rangle\neq\varnothing\}|<\omega$.

$n=1$ 时,由于 $\langle x_i\rangle$ 为紧集,$\mathscr{P}$ 为 k—网,则存在有限子族 $\mathscr{P}'_1\subset\mathscr{P}$,使 $\langle x_i\rangle\subset\bigcup\mathscr{P}''_1\subset X$,由于 $\mathscr{P}_{n+1}$ 加细 $\mathscr{P}_n$,则可从 $\mathscr{P}_1$ 中选出子族 $\mathscr{P}_1^{(*)}$,$|\mathscr{P}_1^{(*)}|<\omega$,$\langle x_i\rangle\subset\bigcup\mathscr{P}'_1\subset\bigcup\mathscr{P}_1^{(*)}$,由 $\mathscr{P}_1$ 的星有限性

$$|\{P:P\in\mathscr{P}_1,P\cap\langle x_i\rangle\neq\varnothing\}|<\omega.$$

设 $n=k$ 时,论断 2 成立,则令

$$\mathscr{P}''_r=\{P:P\in\mathscr{P}_r,P\cap\langle x_i\rangle>\neq\varnothing\},\ r=1,2\cdots k.$$

显然 $|\mathscr{P}''_r|<\omega$ $(r\in\{1,2,\cdots k\})$. 令 $\mathscr{P}''_r=\{P_j^{(r)}:\ j=1\cdots m_r\}$. 若 $P_j^{(r)}\neq\{x_0\}$. 则取 $y_j^{(r)}\in P_j^{(r)}$,$y_j^{(r)}\neq x$. 则存在某一 $m_0\in N$ 使

$$\{x_0\}\cup\{x_n:n\geqslant m_0\}\subset X-\bigcup_{r=1}^{k}\{y_j^{(r)}:j\in\{1,2\cdots m_r\},P_j^{(r)}\neq\{x_0\}\}.$$

由于 $\mathscr{P}$ 为 k—网,则存在 $\mathscr{P}'_{k+1}\subset\mathscr{P}$,$|\mathscr{P}'_{k+1}|<\omega$,使

$$\{x_0\}\cup\{x_n:n\geqslant m_0\}\subset\bigcup\mathscr{P}'_{k+1}\subset X-\bigcup_{r=1}^{k}\{y_j^{(r)}:j\in\{1,2\cdots m_r\},P_j^{(r)}\neq\{x_0\}\}.$$

显然 $\mathscr{P}'_{k+1}\cap(\bigcup_{r=1}^{k}\mathscr{P}''_r-\{x_0\})=\varnothing$. 故

$$\mathscr{P}'_{k+1}-\{x_0\}\subset\bigcup_{n=k+1}^{\infty}\mathscr{P}_n.$$

由 $\mathscr{P}_{n+1}$ 加细 $\mathscr{P}_n$,故存在 $\mathscr{P}''_{k+1}\subset\mathscr{P}_{k+1}$,使 $|\mathscr{P}''_{k+1}|<\omega$,

$$\bigcup\mathscr{P}'_{k+1}\subset\bigcup\mathscr{P}''_{k+1}\quad 且\langle x_i\rangle\subset\bigcup\mathscr{P}''_{k+1}.$$

由 $\mathscr{P}_{k+1}$ 为星有限族,则

$$|\{P:P\in\mathscr{P}_{k+1}.\ P\cap\langle x_i\rangle\neq\varnothing\}|<\omega.$$

论断 3　对 $n\in N$,$\mathscr{P}_n$ 为 CWP 族,否则存在 $\{P_i:i\in N\}\subset\mathscr{P}_n$, $Z_i\in P_i$. 使 $\overline{\bigcup_{i\in N}\{Z_i\}}-\bigcup_{i\in N}\{Z_i\}\neq\varnothing$. 取 $Z_0\in\overline{\bigcup_{i\in N}\{Z_i\}}-\bigcup_{i\in N}\{Z_i\}$. 由于 X 为 Fre′chet 空间,则存在 $\{Z_{ik}:k\in N\}\subset\{Z_i:i\in N\}$,$Z_{ik}\to Z_0$. 令 $\langle Z_{ik}\rangle=\{Z_0\}\cup\{Z_{ik}:k\in N\}$. 则

$$|P:P\in\mathscr{P}_n,P\cap\langle Z_{ik}\rangle\neq\varnothing|\geqslant\omega.$$

矛盾. 由(论断 2).

④→①.

设 $\mathscr{P}=\bigcup_n\mathscr{P}_n$ 为 σ—CWP k—网,往证 $\mathscr{P}_n$ 为 HCP 族. 对 $m\in N$,若 $\mathscr{P}_m$ 不是 HCP 族,则存在 $\{B_\alpha:\alpha\in\Lambda\}\subset\mathscr{P}_n$. $A_\alpha\subset B_\alpha$,$\overline{\bigcup_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha}-\bigcup_{\alpha\in\Lambda}\overline{A}_\alpha\neq\varnothing$. 取 $Z_0\in\overline{\bigcup_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha}-\bigcup_{\alpha\in\Lambda}\overline{A}_\alpha$. 由 X 为 Fre′chet 空间,则存在 $\{Z_n:n\in N\}\subset\bigcup_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha$. $Z_n\to Z_0$.

由于 $Z_0\overline{\in}\bigcup_{\alpha\in\Lambda}\overline{A}_\alpha$,故存在 $\{A_i:i\in N\}\subset\{A_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$ 及 $\{Z_{ni}:i\in N\}\subset\{Z_n:n\in N\}$,使 $Z_{ni}\in A_i$.

$$Z_0\in\overline{\bigcup_{i\in N}\{Z_{ni}\}}=\bigcup_{i\in N}\{Z_{ni}\}.$$

矛盾. 故 $\mathscr{P}$ 为 σ—HCP k—网,X 为 Lašnev 空间.

推论 11[9,定理 3]　设 X_i 为 Lašnev 空间,若 Y 为 $\prod_{i\in N}X_i$ 的 Fre′chet 子空间,则 Y 为 Lašnev 空间.

证明 由定理10可知 X 为 Lašnev 空间的充要条件是 X 为 Fre'chet 空间，且有一 k—网 $\mathscr{P}=\bigcup_n \mathscr{P}_n$. 对 $n\in N$, $\mathscr{P}_n$ 为 X 的划分，$\mathscr{P}_{n+1}$ 加细 $\mathscr{P}_n$. 对 X_i, $\mathscr{P}_i=\bigcup_n \mathscr{P}_n^{(i)}$ 为 X_i 的 k—网，且 $\mathscr{P}_n^{(i)}$ 为 X_i 的划分，$\mathscr{P}_{n+1}^{(i)}$ 加细 $\mathscr{P}_n^{(i)}$.

令 $\mathscr{P}'_n=\{\prod_{i=1}^{n} P_i\times\sum_{n+1}^{\infty} X_i : P_i\in\mathscr{P}_n^{(i)}\}$, $\mathscr{P}''_n=\{P\cap Y : P\in\mathscr{P}'_n\}$. 则 $\mathscr{P}''_n$ 为 Y 的一个划分，$\mathscr{P}''=\bigcup_n \mathscr{P}''_n$ 为 Y 的 k—网且 $\mathscr{P}''_{n+1}$ 加细 $\mathscr{P}'_n$. 所以 Y 为 Lašnev 空间.

参 考 文 献

[1] G. Gruenhage, Generalized Metric Spaces, Handbook of Set—Theoretic Topology, 1984, 425—501.

[2] H. H. Hung, *A charactrization of Lašnev spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., Vol. (103). NO. 4, 1988, 1278—1280.

[3] T. Nogura, *The product of* $\langle\alpha_i\rangle$ *spaces*, Top. Appl., 21 (1985) 251—259.

[4] L. Foged, *A characterization of closed images of metric spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., 95 (1985), 487—490.

[5] Y. Tanaka, *Point—countable covers and k—network*, Top. Proc., Vol. (12), 1987, 327—349.

[6] G. Gruenhage, Michael & Tanaka, *Spaces determined by point—countable covers*, Pacific J. Math. Vol. (113), No. 2, 1984, 303—332.

[7] Shou Lin, *On a problem of K. Tamano*, Q & A in General Top., Vol. 6 (1988), 99—102.

[8] K. Morita, *Some Result on M—Spaces*, Collog Math. Societatis Janos Bolyai 8, Topics in Toplolgy, Keszthely, Hungary 1972, 489—503.

[9] 林寿，Lašnev 空间的可数积，待发表.

On Lašnev Spaces

Liu Chuan

(Guangxi University, Nanning, China)

Abstract

In this paper, we give several character-izations of Lašnev spaces and generalize the theorem in [2]. At the same time we improve Hanai-Morita, A. H. Stones' results and answer the problem in [3].