第12卷第3期　　数学研究与评论　　Vol. 12 No. 3
1992年8月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Aug. 1992

φ—序同态及其在φ—连续格理论中的应用*

王戈平　胡兰芳
(徐州师范学院数学系,221009)

作为极小集概念的推广,王国俊在[2]中定义了φ—极小集概念.但由于$\varphi\subset\mathscr{P}(L)$可具有任意性,不同的完备格上的$\varphi$—极小集之间难以比较.为此,本文中我们引进相容$\varphi$—集的概念,给出了$\varphi$—序同态的的定义,它是广义序同态概念[3]的推广.然后我们给出了φ—序同态的某些特征性质,并讨论φ—序同态与φ—连续格、φ—代数格理论[4]之间的联系.

在本文中,若不加特别说明,L,L_1,L_2等均表示完备格.$\varphi(L)$称为L上的φ—集,如果$\varphi(L)\subset\mathscr{P}(L)$,且$\forall\ x\in L,\{x\}\in\varphi(L)$.

定义1　设$\varphi(L_1)$与$\varphi(L_2)$分别为L_1与L_2上的φ—集.若对任意保序映射$f:L_1\to L_2$,有$f(\varphi(L_1))\subset\varphi(L_2)$,且对任意保序映射$g:L_2\to L_1$,有$g(\varphi(L_2))\subset\varphi(L_1)$,则称$\varphi(L_1)$与$\varphi(L_2)$是相容的.

例如,当$\varphi(L_1)$与$\varphi(L_2)$分别为L_1与L_2上全体有向集组成的集族时,$\varphi(L_1)$与$\varphi(L_2)$相容.对任一基数α,若$\varphi(L_1)$与$\varphi(L_2)$分别表示L_1与L_2的所有基数小于α的子集组成的集族,则$\varphi(L_1)$与$\varphi(L_2)$相容.

定义2[5]　设P,Q为偏序集,$f:P\to Q$与$g:Q\to P$都是保序映射,如果对于任意$x\in P,y\in Q$,$f(x)\leqslant y$等价于$x\leqslant g(y)$,则称(g,f)为Galois连接(联络),同时称f为g的下连接,g为f的上连接.

命题1[5]　(1)若(g,f)为Galois连接,则g保任意交(下确界),f保任意并(上确界).

(2)　若P为完备格,Q为偏序集,映射$g:Q\to P$保任意交,则g有下连接$f:P\to Q$,且f的定义为$f(x)=\inf\{y\in Q\mid x\leqslant g(y)\}$,　$\forall\ x\in P$.

(3)　若P为偏导集,Q为完备格,映射$f:P\to Q$保任意并,则f有上连接$g:Q\to P$,且g的定义为$g(y)=\sup\{x\in P\mid f(x)\leqslant y\}$,　$\forall\ y\in Q$.

定义3　设L_1与L_2为完备格,$\varphi(L_1)$与$\varphi(L_2)$是相容的,映射$f:L_1\to L_2$称为φ—序同态,如果f保任意并,且f的上连接$g:L_2\to L_1$保φ—并.其中g保φ—并是指,若$B\in\varphi(L_2)$,则$\sup g(B)=g(\sup B)$

注　φ—同态是广义序同态概念的推广.只要取$\varphi(L_1)=\mathscr{P}(L_1)$,$\varphi(L_2)=\mathscr{P}(L_2)$.显然$\varphi(L_1)$与$\varphi(L_2)$是相容的,且$f:L_1\to L_2$为$\varphi$—序同态当且仅当$f$为广义序同态.

定义4　设$\varphi(L)$是L上的φ—集,$x,y\in L$.记号$x\ll_{\varphi(L)}y$(在不产生混淆的情况下简记为x

* 1990年9月27日收到.国家自然科学基金资助项目.

$\ll_{\varphi}y$ 表示：若 $D\in\varphi(L)$ 且 $y\leqslant\sup D$，则存在 $d\in D$ 使 $x\leqslant d$. 又记 $\twoheaddownarrow_{\varphi}x=\{y\in L\mid y\ll_{\varphi}x\}$. L 称为弱 φ—连续格，若 $\forall\ x\in L$，$x=\sup\twoheaddownarrow_{\varphi}x$. L 称为 φ—连续格，若 L 是弱 φ—连续格，且 $\forall\ x\in L$，存在 $D\in\varphi(L)$ 使 $\twoheaddownarrow_{\varphi}X=\downarrow D$，其中 $\downarrow D=\{x\in L\mid$ 存在 $d\in D$ 使 $x\leqslant d\}$. L 称为强 φ—连续格，若 L 是 φ—连续格，且 $\ll_{\varphi}$ 满足以下插入性质：对任意 $x,y\in L$，若 $x\ll_{\varphi}y$，则存在 $z\in L$ 使 $x\ll_{\varphi}z\ll_{\varphi}y$.

定义 5 设 $\varphi(L)$ 为 L 上的 φ—集，$x\in L$，$A\subset L$. A 称为 x 的弱 $\varphi(L)$—极小集，若满足：(1) $\sup A=x$；(2) 对任意 $D\in\varphi(L)$，若 $x\leqslant\sup D$，则对任意 $a\in A$，存在 $d\in D$，使 $a\leqslant d$. A 称为 x 的 $\varphi(L)$—极小集，若 A 是 x 的弱 $\varphi(L)$—极小集，且存在 $D\in\varphi(L)$ 使 $\downarrow A=\downarrow D$.

在不产生混淆的情况下，弱 $\varphi(L)$—极小集，$\varphi(L)$—极小集简称为弱 φ—极小集，φ—极小集.

定理 1 设 $\varphi(L)$ 是 L 上的 φ—集，$x\in L$，$A\subset L$，则 (1) A 是 x 的弱 φ—极小集当且仅当 $\sup A=x$ 且 $A\subset\twoheaddownarrow_{\varphi}x$；(2) A 是 x 的 φ—极小集当且仅当 A 是 x 的弱 φ—极小集且存在 $D\in\varphi(L)$ 使 $\twoheaddownarrow_{\varphi}x=\twoheaddownarrow_{D}$；(3) 若 x 有(弱)φ—极小集，则 x 的最大(弱)φ—极小集为 $\twoheaddownarrow_{\varphi}x$.

证明 (1) 设 A 是 x 的弱 φ—极小集，对任意 $a\in A$ 与 $D\in\varphi(L)$ 满足 $x\leqslant\sup D$，由弱 φ—极小集定义，存在 $d\in D$ 使 $a\leqslant d$，因此 $a\ll_{\varphi}x$，所以 $A\subset\twoheaddownarrow_{\varphi}x$. 反之，设 $\sup A=x$ 且 $A\subset\twoheaddownarrow_{\varphi}x$. 则对任意 $a\in A$ 有 $a\ll_{\varphi}x$. 又设 $D\in\varphi(L)$，$x\leqslant\sup D$，由定义 4，存在 $d\in D$ 使 $a\leqslant d$. 因此 A 是 x 的弱 φ—极小集.

(2) 设 A 是 x 的 φ—极小集，则由(1)，$A\subset\twoheaddownarrow_{\varphi}$，从而 $\downarrow A\subset\twoheaddownarrow_{\varphi}x$. 设 $y\in\twoheaddownarrow x$，即 $y\ll_{\varphi}x$，由于 $x=\sup A$，存在 $a\in A$ 使 $y\leqslant a$，从而 $y\in\downarrow A$，这证明了 $\downarrow A=\twoheaddownarrow_{\varphi}x$. 因此存在 $D\in\varphi(L)$ 使 $\twoheaddownarrow_{\varphi}x=\downarrow D$. 反之，设 A 是 x 的弱 φ—极小集且存在 $D\in\varphi(L)$ 使 $\twoheaddownarrow_{\varphi}x=\downarrow D$. 由前所证知 $\downarrow A=\twoheaddownarrow_{\varphi}x$，从而 $\downarrow A=\downarrow D$. 因此 A 是 x 的 φ—极小集.

(3) 当 x 有(弱)φ—极小集 A 时，由(1)知 $x=\sup A\leqslant\sup\twoheaddownarrow_{\varphi}x$，从而 $x=\sup\twoheaddownarrow_{\varphi}x$，再由(1)知 $\twoheaddownarrow_{\varphi}x$ 是 x 的(弱)φ—极小集. $\twoheaddownarrow_{\varphi}x$ 的最大性是显然的.

推论 L 是(弱)φ—连续格当且仅当对任意 $x\in L$，x 有(弱)φ—极小集.

定义 6 设 $\varphi(L_1)$ 与 $\varphi(L_2)$ 分别为 L_1 与 L_2 上的 φ—集，映射 $f:L_1\to L_2$ 称为保 $\ll_{\varphi}$ 的，如果当 $x,y\in L_1$ 且 $x\ll_{\varphi}y$ 时有 $f(x)\ll_{\varphi}f(y)$. f 称为保(弱)φ—极小集的，如果当 $x\in L_1$ 且 A 是 x 的(弱)φ—极小集时，$f(A)$ 是 $f(x)$ 的(弱)φ—极小集.

定理 2 设 $\varphi(L_1)$ 与 $\varphi(L_2)$ 是相容的 φ—集，映射 $f:L_1\to L_2$ 有上连接 $g:L_2\to L_1$，则成立以下命题：

(1)若 g 保 φ—并，则 f 保 $\ll_{\varphi}$；

(2)若 L_1 为弱 φ—连续格且 f 保 $\ll_{\varphi}$，则 g 保 φ—并.

证明 (1) 设 $x,y\in L_1$，$x\ll_{\varphi}y$，$A\in\varphi(L_2)$ 满足 $f(y)\leqslant\sup A$. 由定义 2 与 g 保 φ—并，有 $y\leqslant g(\sup A)=\sup g(A)$. 注意到 $g(A)\in\varphi(L_1)$，因此存在 $a\in A$ 使 $x\leqslant g(a)$. 从而 $f(x)\leqslant a$. 这证明了 $f(x)\ll_{\varphi}f(y)$.

(2) 设 $A\in\varphi(L_2)$ 且 $z=\sup A$. 由于 g 保序，有 $g(z)\geqslant\sup g(A)$. 任取 $W\in L_2$ 满足 $W\ll_{\varphi}g(z)$. 由于 f 保 $\ll_{\varphi}$，有 $f(W)\ll_{\varphi}fg(z)\leqslant z$. 因此存在 $a\in A$ 使 $f(W)\leqslant a$，从而 $W\leqslant g(a)\leqslant\sup(A)$. 这证明了 $\twoheaddownarrow_{\varphi}g(z)\subset\downarrow\sup g(A)$. 由于 L_1 是弱 φ—连续格，$g(z)=\sup\twoheaddownarrow_{\varphi}g(z)\leqslant\sup g(A)$. 所以 g 保 φ—并.

推论 若 L_1 为弱 φ—连续格，L_2 为完备格，且 $\varphi(L_1)$ 与 $\varphi(L_2)$ 是相容的，则 $f:L_1\to L_2$ 为 φ

一序同态，当且仅当 f 保任意并与 f 保 $\ll_\varphi$.

命题 2 设 $\varphi(L_1)$ 与 $\varphi(L_2)$ 为相容的 φ—集，L_1 为 φ—连续格，则成立以下命题：

(1)若 $f:L_1\to L_2$ 保弱 φ—极小集，则 f 是保序的；

(2) $f:L_1\to L_2$ 保弱 φ—极小集当且仅当 f 保 φ—极小集.

证明 (1)由 L_1 是 φ—连续格，对任意 $x\in L_1$，$\twoheaddownarrow_\varphi x$ 为 x 的弱 φ—极小集. 由条件，$f(\twoheaddownarrow_\varphi x)$ 为 $f(x)$ 的弱 φ—极小集，从而 $f(x)=\sup f(\twoheaddownarrow_\varphi x)$. 设 $x,y\in L_1$ 满足 $x\leqslant y$，则 $\twoheaddownarrow_\varphi x\subset\twoheaddownarrow_\varphi y$，$f(\twoheaddownarrow_\varphi x)\subset f(\twoheaddownarrow_\varphi y)$，所以 $f(x)=\sup f(\twoheaddownarrow_\varphi x)\leqslant\sup f(\twoheaddownarrow_\varphi y)=f(y)$. 因此 f 是保序的.

(2)设 f 保弱 φ—极小集，$x\in L_1$ 且 A 为 x 的 φ—极小集，则 A 为 x 的弱 φ—极小集且存在 $D\in\varphi(L_1)$ 使 $\downarrow A=\downarrow D$. 由条件，$f(A)$ 为 $f(x)$ 的弱 φ—极小集. 由(1)，f 保序，故有 $f(A)\subset f(\downarrow D)\subset\downarrow f(D)$，从而 $\downarrow f(A)\subset\downarrow f(D)$. 同理可证相反的包含关系，所以 $\downarrow f(A)=\downarrow f(D)$. 由于 $\varphi(L_1)$ 与 $\varphi(L_2)$ 相容，有 $f(D)\in\varphi(L_2)$. 因此 $f(A)$ 为 $f(x)$ 的极小集.

反之，设 f 保 φ—极小集，$x\in L_1$ 且 A 为 x 的弱 φ—极小集. 由于 L_1 为 φ—连续格，存在 $D\in\varphi(L_1)$ 使 $\twoheaddownarrow_\varphi x=\downarrow D$. 由定理 1(2)知 A 为 x 的 φ—极小集. 由条件，$f(A)$ 为 $f(x)$ 的 φ—极小集，从而是弱 φ—极小集.

定理 3 设 $\varphi(L_1)$ 与 $\varphi(L_2)$ 为相容的 φ—集，映射 $f:L_1\to L_2$，则成立以下命题：

(1)若 f 为 φ—序同态，则 f 保弱 φ—极小集；

(2)若 L_1 为 φ—连续格，L_2 为弱 φ—连续格，f 保弱 φ—极小集，且对任意 $y\in L_2$，$f^{-1}(\downarrow y)\in\varphi(L_1)$，则 f 为 φ—序同态.

证明 (1)设 $x\in L_1$，A 是 x 的弱 φ—极小集. 由定理 1，$\sup A=x$ 且 $A\subset\twoheaddownarrow_\varphi x$. 由定理 2(1)，$f$ 保 $\ll_\varphi$，故有 $f(A)\subset f(\twoheaddownarrow_\varphi x)\subset\twoheaddownarrow_\varphi f(x)$. 再由 f 保任意并，$\sup f(A)=f(\sup A)=f(x)$. 所以 $f(A)$ 是 $f(x)$ 的弱 φ—极小集.

(2)由条件，对任意 $x\in L_1$，$\twoheaddownarrow_\varphi x$ 为弱 φ—极小集，且 $f(\twoheaddownarrow_\varphi x)$ 为 $f(x)$ 的弱 φ—极小集. 因此 $f(\twoheaddownarrow_\varphi x)\subset\twoheaddownarrow_\varphi f(x)$. 此式说明 f 是保 $\ll_\varphi$ 的. 由命题 2(1)知 f 是保序的. 对任意 $y\in L_2$，令 $g(y)=\sup f^{-1}(\downarrow y)$，则当 $x\in L_1$，$y\in L_2$ 时，若 $f(x)\leqslant y$，则 $x\in f^{-1}(\downarrow y)$，从而 $x\leqslant g(y)$. 反之，设 $x\leqslant g(y)$. 任取 $z\in L_2$ 满足 $z\ll_\varphi f(x)$. 由于 L_1 为连续格，存在 $A\in\varphi(L_1)$ 使 $\twoheaddownarrow_\varphi x=\downarrow A$，所以 $f(x)=\sup f(\twoheaddownarrow_\varphi x)=\sup f(\downarrow A)=\sup f(A)$. 由于 $f(A)\in\varphi(L_2)$，故存在 $t\in A\subset\twoheaddownarrow_\varphi x$ 使 $z\leqslant f(t)$. 再由 $t\ll_\varphi x\leqslant g(y)=\sup f^{-1}(\downarrow y)$ 与 $f^{-1}(\downarrow y)\in\varphi(L_1)$，存在 $s\in f^{-1}(\downarrow y)$ 使 $t\leqslant s$. 由 f 保序，$f(t)\leqslant f(s)\leqslant y$，从而 $z\leqslant y$. 所以 $\twoheaddownarrow_\varphi f(x)\subset\downarrow y$. 由于 L_2 是弱 φ—连续格，$f(x)=\sup\twoheaddownarrow_\varphi f(x)\leqslant y$. 以上证明了 g 是 f 的上连接. 由命题 1 知 f 保任意并. 再由定理 2 推论，f 为 φ—序同态.

定理 4 设 $\varphi(L_1)$ 与 $\varphi(L_2)$ 为相容的 φ—集，$f:L_1\to L_2$ 为 φ—序同态，记 $L_0=f(L_1)$. 又设 $\varphi(L_0)=\varphi(L_2)\cap\mathscr{P}(L_0)$. 则 L_1 是 φ—连续格(弱 φ—连续格，强 φ—连续格)蕴含 L_0 关于 L_2 的诱导序是 φ—连续格(对应地，弱 φ—连续格，强 φ—连续格).

证明 仅对 L_1 为 φ—连续格的情形证明. 首先证 L_0 关于 L_2 的诱导序是完备的. 设 Y 是 L_0 的任意子集，令 $X=f^{-1}(Y)$，$x=\sup X$，则 $f(X)=Y$. 由 f 保任意并，$\sup_{L_2}Y=f(\sup X=f(x)\in L_0$. 因此 L_0 对 L_2 中的任意并关闭，这说明 L_0 关于 L_2 的诱导序是完备的. 设 $y\in L_0$，则存在 $x\in L_0$ 使 $f(x)=y$. 由定理 1 推论，x 有 $\varphi(L_1)$—极小集 A. 由定理 3(1)，f 是保 φ—极小集的. 因此 $f(A)$ 是 $f(x)$ 的 $\varphi(L_2)$—极小集. 由此得 $\sup_{L_2}f(A)=f(x)\in L_0$，所以 $\sup_{L_0}f(A)=f(x)$. 又有 $f(A)\subset\twoheaddownarrow_{\varphi(L_2)}f(x)$，由于 $\varphi(L_0)\subset\varphi(L_2)$，易证 $L_0\cap\twoheaddownarrow_{\varphi(L_2)}f(x)\subset\twoheaddownarrow_{\varphi(L_0)}f(x)$，所以 $f(A)\subset\twoheaddownarrow_{\varphi(L_2)}f(x)$.

又存在$D\in\varphi(L_1)$使$\downarrow A=\downarrow D$,由$f$保序,$\downarrow f(A)=\downarrow f(D)$且$f(D)\in\varphi(L_2)$,由条件,$f(D)\in\varphi(L_0)$. 以上证明了$f(A)$是$f(x)$的$\varphi(L_0)$—极小集. 由定理1推论知$L_0$关于$L_2$的诱导序是$\varphi$—连续格.

推论 设$\varphi(L_1)$与$\varphi(L_2)$为相容的φ—集,$f:L_1\to L_2$为满的φ—序同态,则L_1是φ—连续格(弱φ—连续格,强φ—连续格)蕴含L_2是φ—连续格(对应地,弱φ—连续格,强φ—连续格).

定义7 设L为完备格,L_0是L的非空子集,$\varphi(L_0)\subset\mathscr{P}(L_0)$. 称$L_0$为$L$的$\varphi$—子代数,若$L_0$对$L$中的任意交与$\varphi$—并关闭(即对任意$A\subset L_0$,有$\inf_L A\in L_0$,且对任意$B\in\varphi(L_0)$有$\sup_L B\in L_0$).

显然,若L_0为L的φ—子代数,则L_0关于L的诱导序构成完备格.

定理5 设$\varphi(L)$与$\varphi(L_0)$是相容的φ—集,L_0是L的φ—子代数,则L是φ—连续格(弱φ—连续格,强φ—连续格)蕴含L_0关于L的诱导序是φ—连续格(对应地,弱φ—连续格,强φ—连续格).

证明 由于L_0是L的φ—子代数,推得嵌入映射$i:L_0\to L_1$保任意交与φ—并. 再由L_0为完备格,故i有下连接$j:L\to L_0$. j是保任意并的. 由定义3,j是φ—序同态. 由[5]命题0—3.7与i为单射,知j为满射. 利用定理4,本定理得证.

定义8 设$\varphi(L)$为L上的φ—集,$x\in L$,记$K_x=\{y\in L\mid y\ll_\varphi y\leqslant x\}$. L称为弱φ—代数格,若对任意$x\in L$,$x=\sup K_x$. L称为φ—代数格,若L是弱φ—代数格,且对任意$x\in L$,存在$D\in\varphi(L)$使$\downarrow K_x\downarrow D$.

满足条件$y\ll_\varphi y$的元$y\in L$称为φ—紧元. 由定理1可得:L为(弱)φ—代数格当且仅当对任意$x\in L$,x有由紧元组成的(弱)φ—极小集.

命题3 (1)弱φ—代数格一定是弱φ—连续格;(2)φ—代数格一定是强φ—连续格.

证明 (1)显然.

(2)设L是φ—代数格,显然L是φ—连续格. 设$x,y\in L$满足$x\ll_\varphi y$. 令$K_y=\{z\in L\mid z\ll_\varphi z\leqslant y\}$,则$y=\sup K_y$且存在$D\in\varphi(L)$使$\downarrow K_y=\downarrow D$. 所以$y=\sup\downarrow K_y=\sup\downarrow D=\sup D$. 因此存在$d\in D$使$x\leqslant d$. 由$d\in\downarrow K_y$,存在$z\in K_y$使$d\leqslant z$. 所以$x\leqslant z\ll_\varphi z\leqslant y$,故$x\ll_\varphi z\ll_\varphi y$. 因此$L$是强$\varphi$—连续格.

定理6 在定理4的条件下,L_1是(弱)φ—代数格蕴含L_0关于L_2的诱导序是(弱)φ—代格.

证明 仿定理4的证明进行,只要令A是x的由紧元组成的$\varphi(L_1)$—极小集,则由于φ—序同态f是保$\ll_\varphi$的,从而保φ—紧元,因此$f(A)$是$f(x)$的由φ—紧元组成的$\varphi(L_0)$—极小集. 从而L_0关于L_2的诱导序是φ—代数格.

定理7 在定理5的条件下,L是(弱)φ—代数格蕴含L_0关于L的诱导序是(弱)φ—代数格.

证明仿定理5进行.

参 考 文 献

[1] 王戈平,完全分配格上的弱辅助序与广义序同态,数学季刊,3(1988),4:76—83.

[2] 王国俊,φ—极小集理论及其应用,科学通报,31(1986),1049—1053.

[3] 王国俊,广义序同态理论,东北数学,1(1985),2:141—152.

[4] Novak D., Generalization of continuous posets, Trans. Amer. Math. Soc., 272(1982), 645—667.

[5] Gierz G., et al., *A Compendium of Continuous Lattices*, Springer—Verlag, 1980.

[6] 刘应明、何明,完全分配格上的诱导映射,科学通报,30(1985),1203—1206.

[7] 王戈平、时根保,φ—归纳集范畴与偏序集的一个分类定理,数学年刊,待发表.

φ-order-homomorphisms and Their Applications to the Theory of φ-continuous Lattices

Wang Geping *Hu Lanfang*

(Xuzhou Teachers College, China)

Abstract

In this paper, we introduce the concept of φ-order-homomorphisms which is a generalization of the concept of generalized order-homomorphisms and give some applications of φ-order-jomomorphisms to the theory of φ-continuous lattices.