第12卷第3期　　数学研究与评论　　Vol. 12 No. 3
1992年8月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Aug. 1992

四元数自共轭矩阵乘积的特征值不等式*

刘建洲　　　谢清明
(湘西民族教师进修学院，吉首 416000)　(吉首民族师范学校，吉首 416000)

摘要

由于四元数对乘法无交换律，因而对四元数自共轭矩阵的特征值问题的讨论比复数矩阵的相应问题要困难得多. 文[1]、[2]分别对四元数自共轭矩阵的特征值和两个四元数自共轭矩阵乘积的特征值进行了估计，做了一定的工作，但与复数域上的有关结果相比较，还有较大差距. 本文对四元数自共轭矩阵乘积的特征值进行了探讨，得到了较好的结论，推广了[1]、[2]中的结果.

§1　对[2]中一个问题的商榷

用“Q”表示四元数体，“$Q^{m\times n}$”表示 $m\times n$ 阶四元数矩阵集，“$SC_n(Q)$”表示 n 阶四元数自共轭矩阵集，设 $A\in SC_n(Q)$，$A>0(A\geqslant 0)$表示 A 正定(半正定)；设 $q\in Q$，记 $N(q)=q\bar{q}$，$\bar{q}$ 表示 q 的共轭四元数. “ * ”表示共轭转置.

文[2]定义四元数矩阵的特征值和特征向量为“If $A\in Q^{n\times n}$, $X\in Q^{n\times 1}$, $\lambda\in Q$, $AX=\lambda X$, then λ is called eigenvalue of A, and X is called correspunding eigenvector of A. ”，由于四元数对乘法无交换性，对 $X\in Q^{n\times 1}$，$\lambda\in Q$，一般没有 $\lambda X=X\lambda$，因此，我们认为，按文[3]，这样定义的 λ 称为 A 的左特征值比较确切.

文[2]按此定义，给出命题([2]中 Theorem)：“Suppose $0\neq A\in SC_n(Q)$, $0\neq B\in SC_n(Q)$; λ_i and u_i are, respectively, eigenvalues of A and B, write $|\lambda_1|\geqslant\cdots\geqslant|\lambda_n|$ and $|u_1|\geqslant\cdots\geqslant|u_n|$, λ be arbitrary eigenvalues of AB, then λ be real number. …. ”，我们认为此命题是错误的，[2]在证明此命题时，用到了“$A\geqslant 0$, $B\geqslant 0$”的条件. 下举反例说明此命题的错误. 设

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}\in SC_2(Q),\quad B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\in SC_2(Q),$$

则

$$AB=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 4 & 0\end{pmatrix},$$

取 $X=\left(1,\frac{3+\sqrt{7}i}{2}\right)^*$，$\lambda=\frac{3+\sqrt{7}i}{2}$，则有 $ABX=\lambda X$，显然 $\lambda\in Q$，但 λ 不是实数.

* 1990年5月3日收到.

§2 自共轭矩阵乘积的特征值不等式

用"R"表示实数集,"$R^{m\times n}$"表示 $m\times n$ 阶实矩阵集. 设 $a_i\in R(i=1,2,\cdots,n)$是一组实数,在无特殊说明时,以下总设其按大小顺序排列为 $a_{[1]}\geqslant a_{[2]}\geqslant\cdots\geqslant a_{[n]}$.

设 x、$y\in R^{1\times n}$,如果它们的分量满足:$\sum_{i=1}^{k}x_{[i]}\leqslant\sum_{i=1}^{k}y_{[i]}$, $k=1,2,\cdots,n-1$,且 $\sum_{i=1}^{n}x_{[i]}=\sum_{i=1}^{n}y_{[i]}$,则称 x 被 y 控制,记作 $x\prec y$.

设 $A=(a_{ij})\in Q^{n\times n}$, $\mathrm{tr}(A)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$ 表示矩阵 A 的迹. 若 $A=BC\in Q^{n\times n}$,其中 B、$C\in SC_n(Q)$,且 $B>0$(或 $C>0$),由[2]中定理(ii)知 A 的特征值为实数,以下总记其 n 个特征值为 $\lambda_i(A)$ $(i=1,2,\cdots,n)$.

引理 1[4] 设 x、$y\in R^{1\times n}$,则

$$\sum_{i=1}^{n}x_{[i]}y_{[i]}\geqslant\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\geqslant\sum_{i=1}^{n}x_{[i]}y_{[n-i+1]}.$$

引理 2[5] 设 x、y、$z\in R^{1\times n}$,且 $x\prec y$,则

$$\sum_{i=1}^{n}x_{[i]}z_{[i]}\leqslant\sum_{i=1}^{n}y_{[i]}z_{[i]},$$

$$\sum_{i=1}^{n}x_{[n-i+1]}z_{[i]}\geqslant\sum_{i=1}^{n}y_{[n-i+1]}z_{[i]}.$$

引理 3[1] 设 $A\in SC_n(Q)$,B 是它的任一 $k(\leqslant n)$阶主子阵,则

$$\lambda_{[i]}(A)\geqslant\lambda_{[i]}(B)\geqslant\lambda_{[i+(n-k)]}(A),\ i=1,2,\cdots,k.$$

引理 4 设 $A=(a_{ij})\in SC_n(Q)$,则

$$(a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn})\prec(\lambda_1(A),\lambda_2(A),\cdots,\lambda_n(A)).$$

证明 显然,存在置换矩阵 T,使

$$TAT^*=\begin{pmatrix}a_{[11]} & & & \\ & a_{[22]} & & * \\ * & & \ddots & \\ & & & a_{[nn]}\end{pmatrix}.$$

因为 $A\in SC_n(Q)$,则 $\lambda_{[i]}(A)=\lambda_{[i]}(TAT^*)$, $i=1,2,\cdots,n$,且 $\sum_{i=1}^{n}a_{ii}=\mathrm{tr}(A)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(A)$[3]. 对任一自然数 $k(<n)$,设 TAT^* 的 k 阶顺序主子阵为 B_k,由引理 3 有

$$\sum_{i=1}^{k}a_{[ii]}=\mathrm{tr}(B_k)=\sum_{i=1}^{k}\lambda_{[i]}(B_k)\leqslant\sum_{i=1}^{k}\lambda_{[i]}(TAT^*)=\sum_{i=1}^{k}\lambda_{[i]}(A).$$

从而结论得证.

定理 1 设 $A\in SC_n(Q)$，$P\in Q^{k\times n}(k\leqslant n)$，$\beta_i=\lambda_i(PP^*)$，$i=1,2,\cdots,k$，则

$$\sum_{i=1}^{k}\lambda_{[i]}(A)\beta_{[i]}\geqslant \mathrm{tr}(PAP^*)\geqslant \sum_{i=1}^{k}\lambda_{[n-i+1]}(A)\beta_{[i]}.$$

证明 因为 $A\in SC_n(Q)$，则 A 可分解为 $A=UD_\lambda U^*$，其中 $D_\lambda=\mathrm{diag}(\lambda_{[1]}(A),\lambda_{[2]}(A),\cdots,\lambda_{[n]}(A))$，$U$ 是广义酉矩阵. 记 $M=PU=(m_{ij})\in Q^{k\times n}$，$B=M^*M=(b_{ij})$，由[6]易知：$\lambda_{[i]}(B)=\lambda_{[i]}(U^*P^*PU)=\lambda_{[i]}(P^*P)=\beta_{[i]}$，$i=1,2,\cdots,k$，且当 $i>k$ 时 $\lambda_{[i]}(B)=0$. 从而有

$$\mathrm{tr}(PAP^*)=\mathrm{tr}(MD_\lambda M^*)=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}m_{ij}\lambda_{[j]}(A)\overline{m_{ij}}=\sum_{j=1}^{n}\lambda_{[j]}(A)\sum_{i=1}^{k}m_{ij}\overline{m_{ij}}$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\lambda_{[j]}(A)\sum_{i=1}^{k}\overline{m_{ij}}m_{ij}=\sum_{j=1}^{n}\lambda_{[j]}(A)b_{jj}.$$

由引理 1 有

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_{[j]}(A)b_{[jj]}\geqslant\sum_{j=1}^{n}\lambda_{[j]}(A)b_{[jj]}\geqslant\sum_{j=1}^{n}\lambda_{[n-j+1]}(A)b_{[jj]},$$

由引理 4 知，$(b_{11},b_{22},\cdots,b_{nn})\prec(\lambda_1(B),\lambda_2(B),\cdots\lambda_n(B))$，从而由引理 2 有

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_{[n-j+1]}(A)b_{[jj]}\geqslant\sum_{j=1}^{n}\lambda_{[n-j+1]}(A)\lambda_{[j]}(B)=\sum_{j=1}^{k}\lambda_{[n-j+1]}(A)\beta_{[j]};$$

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_{[j]}(A)b_{[jj]}\leqslant\sum_{j=1}^{n}\lambda_{[j]}(A)\lambda_{[j]}(B)=\sum_{j=1}^{k}\lambda_{[j]}(A)\beta_{[j]}.$$

即得结论证明.

推论 1 设 $A\in SC_n(Q)$，则对任意自然数 $k(\leqslant n)$，有

$$\max_{UU^*=I_k}\mathrm{tr}(UAU^*)=\sum_{i=1}^{k}\lambda_{[i]}(A);$$

$$\min_{UU^*=I_k}\mathrm{tr}(UAU^*)=\sum_{i=1}^{k}\lambda_{[n-i+1]}(A).$$

证明 设 $A=VD_\lambda V^*$，其中 $D_\lambda=\mathrm{diag}(\lambda_{[1]}(A),\lambda_{[2]}(A),\cdots\lambda_{[n]}(A))$，$V$ 是广义酉矩阵，由定理 1 及分别取 $U=(I_k,0)V^*$ 和 $U=(0,I_k)V^*$ 即得结论.

定理 2 设 A、$B\in SC_n(Q)$，且 $A>0$，则对任意自然数 $k(\leqslant n)$，有

$$\sum_{i=1}^{k}\lambda_{[i]}(A)|\lambda_{[i]}(B)|\geqslant\sum_{i=1}^{k}\lambda_{[i]}(AB)\geqslant\sum_{i=1}^{k}\lambda_{[i]}(A)\lambda_{[n-i+1]}(B).$$

特别地，若 $B\geqslant0$，则

$$\sum_{i=1}^{k}\lambda_{[i]}(A)\lambda_{[i]}(B)\geqslant\sum_{i=1}^{k}\lambda_{[i]}(AB)\geqslant\sum_{i=1}^{k}\lambda_{[i]}(A)\lambda_{[n-i+1]}(B).$$

证明 由 $A>0$ 知存在矩阵 $P>0$，使 $A=P^2$；对任意 $U\in Q^{k\times n}$，$UU^*=I_k$，显然存在矩阵 $V\in Q^{(n-k)\times n}$，使 $(U^*,V^*)^*(U^*,V^*)=I_n$. 记 $W=(U^*,V^*)^*$，则 UAU^* 是 WAW^* 的 k 阶主子阵，由引理 3 知，对任意正整数 $i(\leqslant k)$ 有

$$0<\lambda_{[i+n-k]}(A)=\lambda_{[i+n-k]}(WAW^*)\leqslant\lambda_{[i]}(UAU^*)\leqslant\lambda_{[i]}(WAW^*)=\lambda_{[i]}(A),$$

从而由推论 1、定理 1 和上不等式有

$$\sum_{i=1}^{k}\lambda_{[i]}(AB)=\sum_{i=1}^{k}\lambda_{[i]}(P^{-1}ABP)=\sum_{i=1}^{k}\lambda_{[i]}(P^{-1}P^{2}BP^{*})=\sum_{i=1}^{k}\lambda_{[i]}(PBP^{*})$$

$$=\max_{UU^{*}=I_k}\operatorname{tr}(UPBP^{*}U^{*})\leqslant\max_{UU^{*}=I_k}\sum_{i=1}^{k}\lambda_{[i]}(B)\lambda_{[i]}(UPP^{*}U^{*})$$

$$\leqslant\max_{UU^{*}=I_k}\sum_{i=1}^{k}|\lambda_{[i]}(B)|\lambda_{[i]}(UAU^{*})\leqslant\max_{UU^{*}=I_k}\sum_{i=1}^{k}|\lambda_{[i]}(B)|\lambda_{[i]}(A)$$

$$=\sum_{i=1}^{k}|\lambda_{[i]}(B)|\lambda_{[i]}(A).$$

其次，我们证右端不等式：

设 $A=\Gamma D_\lambda\Gamma^{*}$，其中 $D_\lambda=\operatorname{diag}(\lambda_{[1]}(A),\lambda_{[2]}(A),\cdots,\lambda_{[n]}(A))$，$\Gamma$ 是广义酉矩阵，$\overline{B}=\Gamma^{*}B\Gamma=(b_{ij})$，显然，$\lambda_{[i]}(B)=\lambda_{[i]}(\overline{B})$，$i=1,2,\cdots,n$ 从而由引理 4 有 $(b_{11},b_{22},\cdots,b_{nn})\prec(\lambda_1(B),\lambda_2(B),\cdots,\lambda_n(B))$. 又记 $\bar{\lambda}_{[i]}(A)=\lambda_{[i]}(A)(i=1,2,\cdots,k)$，$\bar{\lambda}_{[i]}(A)=0(i=k+1,\cdots,n)$. 从而由推论 1、引理 1 和引理 2 有

$$\sum_{i=1}^{k}\lambda_{[i]}(AB)=\sum_{i=1}^{k}\lambda_{[i]}(\Gamma D_\lambda\Gamma^{*}B)=\sum_{i=1}^{k}\lambda_{[i]}(D_\lambda\Gamma^{*}B\Gamma)=\sum_{i=1}^{k}\lambda_{[i]}(D_\lambda^{\frac{1}{2}}\overline{B}D_\lambda^{\frac{1}{2}})$$

$$=\max_{UU^{*}=I_k}\operatorname{tr}(UD_\lambda^{\frac{1}{2}}\overline{B}D_\lambda^{\frac{1}{2}}U^{*})\geqslant\operatorname{tr}[(I_k,0)(D_\lambda^{\frac{1}{2}}\overline{B}D_\lambda^{\frac{1}{2}})(I_k,0)^{*}]=\sum_{i=1}^{k}\lambda_{[i]}(A)b_{ii}$$

$$=\sum_{i=1}^{k}\bar{\lambda}_{[i]}(A)b_{ii}=\sum_{i=1}^{n}\bar{\lambda}_{[i]}(A)b_{ii}\geqslant\sum_{i=1}^{n}\bar{\lambda}_{[i]}(A)b_{[n-i+1,n-i+1]}$$

$$\geqslant\sum_{i=1}^{n}\bar{\lambda}_{[i]}(A)\lambda_{[n-i+1]}(B)=\sum_{i=1}^{k}\lambda_{[i]}(A)\lambda_{[n-i+1]}(B).$$

推论 2 设 A、$B\in SC_n(Q)$，$A>0$，B 的特征值按绝对值的大小顺序排列为 $|\bar{\lambda}_1(B)|\geqslant|\bar{\lambda}_2(B)|\geqslant\cdots\geqslant|\bar{\lambda}_n(B)|$，则对任意正整数 $k(\leqslant n)$ 有

$$\sum_{i=1}^{k}\lambda_{[i]}(AB)\leqslant\sum_{i=1}^{k}\lambda_{[i]}(A)|\bar{\lambda}_i(B)|.$$

证明 注意到对任意 $i(1\leqslant i\leqslant n)$ 有 $|\lambda_{[i]}(B)|\leqslant|\bar{\lambda}_i(B)|$，再由定理 2 立得结论.

§3 四元数矩阵积的左(右)特征值估计

定理 3 设 A、$B\in Q^{n\times n}$，$\lambda(AB)$ 是 (AB) 的任一左(右)特征值[3]，则

$$\lambda_{[n]}(A^{*}A)\lambda_{[n]}(B^{*}B)\leqslant N(\lambda(AB))\leqslant\lambda_{[1]}(A^{*}A)\lambda_{[1]}(B^{*}B).$$

证明 只对 $\lambda(AB)$ 是 AB 的左特征值进行证明，是右特征值情况可类似证明.

由左特征值定义知，存在 $X\in Q^{n\times 1}$，使 $ABX=\lambda(AB)X$. 令 $y=\dfrac{X}{\sqrt{X^{*}X}}\in Q^{n\times 1}$，则 $y^{*}y=1$，且

$ABy = AB\dfrac{X}{\sqrt{X^*X}} = \dfrac{1}{\sqrt{X^*X}}ABX = \dfrac{1}{\sqrt{X^*X}}\lambda(AB)X = \lambda(AB)y$. 从而不妨设 $X^*X=1$. 显然存在 $V\in Q^{n\times(n-1)}$,使 (X,V) 是广义酉矩阵,由引理 3 有

$$\lambda_{[n]}(B^*B) = \lambda_{[n]}[(X,V)^*B^*B(X,V)] = \lambda_{[1+(n-1)]}[(X,V)^*B^*B(X,V)] \leqslant \lambda_{[1]}(X^*B^*BX)$$
$$\leqslant \lambda_{[1]}[(X,V)^*B^*B(X,V)] = \lambda_{[1]}(B^*B).$$

由 $ABX=\lambda(AB)X$ 知 $X^*B^*A^*=X^*\overline{\lambda(AB)}$,从而有

$$X^*B^*A^*ABX = X^*\overline{\lambda(AB)}\lambda(AB)X = N(\lambda(AB))X^*X = N(\lambda(AB)).$$

所以,由定理 1 有

$$N(\lambda(AB)) = X^*B^*A^*ABX = \mathrm{tr}(X^*B^*A^*ABX) \leqslant \lambda_{[1]}(A^*A).$$
$$\lambda_{[1]}(X^*B^*BX) \leqslant \lambda_{[1]}(A^*A)\lambda_{[1]}(B^*B);$$
$$N(\lambda(AB)) = \mathrm{tr}(X^*B^*A^*ABX) \geqslant \lambda_{[n]}(A^*A)\lambda_{[1]}(X^*B^*BX) \geqslant \lambda_{[n]}(A^*A)\lambda_{[n]}(B^*B).$$

用数学归纳法,我们不难证明:

推论 3 设 $A_i\in Q^{n\times n}$, $(i=1,2,\cdots,m)$, $\lambda(\prod_{i=1}^{m}A_i)$ 是矩阵 $\prod_{i=1}^{m}A_i$ 的任一左(右)特征值,则

$$\prod_{i=1}^{m}\lambda_{[n]}(A_i^*A_i) \leqslant N(\lambda(\prod_{i=1}^{m}A_i)) \leqslant \prod_{i=1}^{m}\lambda_{[1]}(A_i^*A_i).$$

推论 4 设 $A\in Q^{n\times n}$, $\lambda(A)$ 是 A 的任一左(右)特征值,则

$$\lambda_{[n]}(A^*A) \leqslant N(\lambda(A)) \leqslant \lambda_{[1]}(A^*A).$$

证明 在定理 3 中取 $B=I_n$ 立得结论.

参 考 文 献

[1] 庄瓦金,四元数矩阵的特征值与奇异值不等式,数学进展,4(1988),403—406.

[2] 曹重光,四元数自共轭半正定矩阵乘积的特征值估计,数学研究与评论,1(1990),19—22.

[3] 屠伯埙,Schur 定理在四元数体上的推广,数学年刊(A)辑,2(1988),130—138.

[4] Hardy, G. H., J. E. Littlewood, and G. Pólya, Inequalities, 1st. ed., 2nd. ed. Cambridge Univ. Press, London and New York, 1934, 1952.

[5] Marshall, A. W. and Olkin, I., Inequalities: *Theory of Majorization and Its Applications*, *Academic Press*, New York, 1979.

[6] 庄瓦金,四元数矩阵的分解与 Lavoie 行列式不等式的推广,数学研究与评论,4(1986),23—25.

Inequalities for Eigenvalues of Product of Self-conjugate Quaternion Matrices

Liu Jianzhou
(Xiangxi Nationaity Teacher's Training College)

Xie qingming
(Jishou Nationaity Normal School)

Abstract

Suppose $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in R$, we write $\alpha_{[1]} \geq \alpha_{[2]} \geq \cdots \geq \alpha_{[n]}$. In this paper, we point out a mistake of [2], and obtain the following theorems:

Theorem 1 Suppose $A \in SC_n(Q), P \in Q^{k\times n}(k \leq n), \beta_i = \lambda_i(PP^*), i = 1, 2, \cdots, k$. Then

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_{[i]}(A)\beta_{[i]} \geq \operatorname{tr}(PAP^*) \geq \sum_{i=1}^{k} \lambda_{[n-i+1]}(A)\beta_{[i]}.$$

Theorem 2 Suppose $A, B \in SC_n(Q), A > 0, k(\leq n)$ is an arbitrary natural number. Then

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_{[i]}(A) \mid \lambda_{[i]}(B) \mid \geq \sum_{i=1}^{k} \lambda_{[i]}(AB) \geq \sum_{i=1}^{k} \lambda_{[i]}(A)\lambda_{[n-i+1]}(B).$$

Theorem 3 Suppose $A, B \in Q^{n\times n}$, $\lambda(AB)$ is an arbitrary left (right) eigenvalue of AB. Then

$$\lambda_{[n]}(A^*A)\lambda_{[n]}(B^*B) \leq N(\lambda(AB)) \leq \lambda_{[1]}(A^*A)\lambda_{[1]}(B^*B).$$