第12卷第3期　　数学研究与评论　　Vol. 12 No. 3
1992年8月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Aug. 1992

1—fold 环上 $GL_2(R)$的定义关系*

游　宏
(东北师范大学，长春 130024)

P. Chon 在[3]中给出了局部环及某些离散赋值环上 $GL_2(R)$的定义关系. J. Silvester 在[2]中集中讨论了半局部环上线性群的定义关系. 某些讨论 K_2 的文献也从其他角度揭示了线性群的定义关系(见[3]、[4]). 在这篇文章中我们将给出 1—fold 环与一些常见的附加一定条件的 1—fold 环(如单位稳定环，单位正则环等)上 $GL_2(R)$的定义关系.

一.　一些关系式及基本概念

令 R 为有 1 的结合环，U 表 R 中可逆元集合. 又令 $B_{ij}(x)=I^{(2)}+xe_{ij}$ $(i\neq j, 1\leqslant i, j\leqslant 2)$，$[a]_i=I^{(2)}+(a-1)\cdot e_{ii}$ $(a\in U, i=1,2)$，这里 e_{ij} 表矩阵单位；$[\alpha,\beta]_{ij}=[\alpha]_i\cdot[\beta]_j$，$D_{ij}(\alpha)=[\alpha,\alpha^{-1}]_{ij}$ $(\alpha\in U)$，$W_{ij}(v)=B_{ij}(v)=B_{ij}(-v^{-1})B_{ij}(v)$ $(v=1,-1$，或 $0)$.

下列关系式对任一有 1 的结合环 R 都成立

(1)　$B_{ij}(x)B_{ij}(y)=B_{ij}(x+y)$；

(2)　$B_{ij}[a_1,a_2]=[a_1,a_2]B_{ij}(a_i^{-1}xa_j)$　$(a\in U)$

$$([a_1,a_2]=[a_1]_1\cdot[a_2]_2)；$$

(3)　$[a_1,a_2][\beta_1,\beta_2]=[a_1\beta_1,a_2\beta_2]$　$(a_i,\beta_i\in U)$；

(4)　$B_{ij}(x)=B_{ji}(1)B_{ij}(-1)B_{ji}(-x)B_{ij}(1)B_{ji}(-1)$；

(5)　$B_{ij}(a-1)B_{ji}(1)=D_{ij}(a)B_{ji}(a)B_{ij}(1-a^{-1})$　$(a\in U)$

(5′)　$B_{ij}(x)B_{ji}(y)[p(y,x)]_j=[p(x,y)]_iB_{ji}(y)B_{ij}(x)$

$$(p(x,y)=1+xykU)；$$

(5″)　$B_{ij}(x)B_{ji}(y)B_{ij}(z)=[p(x,y,z)]_i[p(z,y,x)^{-1}]_j$
$\cdot B_{ji}(p(z,y,x)p(y,z))B_{ij}(-p(x,y,z)^{-1}p(x,y))W_{ij}(1)$

$$(p(x,y,z)=x+z+xyz\in U).$$

上述关系式(1)－(5)与[1]中所给的关系式等价，故我们还可得出以下几个推论：

(6)　$(W_{ij}(1))^2=-I$；

(7)　$W_{ij}(1)=W_{ji}(-1)$；

(8)　$B_{ij}(x)=W_{ji}(1)B_{ji}(-x)W_{ji}(1)^{-1}$；

* 1990年1月9日收到.

(9) $B_{ij}(x)B_{ji}(\alpha^{-1})B_{ij}(y)=-B_{ij}(\alpha+x)D_{ij}(\alpha)B_{ji}(-y-\alpha)W_{ij}(1)\quad(\alpha\in U)$;

(10) $B_{ij}(-x)B_{ji}(\alpha+1)B_{ij}(-(\beta+1))B_{ji}(y)=B_{ij}(\alpha^{-1}-x)D_{ij}(\alpha^{-1})$

$\cdot B_{ji}(-1-\alpha^{-1}-\beta^{-1})[\beta,\beta^{-1}]_{ij}B(\beta^{-1}-y)W_{ij}(1)\quad(\alpha,\beta\in U)$.

注 在(5″)的证明过程中,注意 $p(x,y)p(z,y,x)=p(x,y,z)p(y,x)$,即 $p(x,y,z)^{-1}p(x,y)=p(y,x)p(z,y,x)^{-1}$.

命题 1 (i). 关系式(5)是(5′)与(2),(3)的推论;

(ii). 关系式(5′)是(5″)与(1)—(3)的推论.

证明 (i). 在(5′)中置 $x=\alpha-1,y=1$,应用(2),(3)即得.

(ii). 在(5″)中置 $x=x_1,y=y_1-1,z=1$,此时 $p(x,y,z)=p(x_1,y_1),p(z,y,x)=p(y_1,x_1)$. 而

$$\begin{aligned}B_{ij}(x_1)B_{ji}(y_1-1)B_{ij}(1)&=[p(y_1,x_1)^{-1}]_j[p(x_1,y_1)]_i\\&\quad\cdot B_{ji}(y_1+y_1x_1y_1)B_{ij}(-(1-(1+x_1y_1)^{-1}x_1))W_{ij}(1)\\&=[p(y_1,x_1)^{-1}]_j[p(x_1,y_1)]_iB_{ji}((1+y_1x_1)y_1)B_{ij}(-(1-(1+x_1y_1)^{-1}x_1)B_{ij}(1)B_{ji}(-1)B_{ij}(1)\\&=[p(y_1,x_1)^{-1}]_j[p(x_1,y_1)]_iB_{ji}((1+y_1x_1)y_1)B_{ij}((1+x_1y_1)^{-1}x_1)B_{ji}(-1)B_{ij}(1)\ (\text{用}(1)),\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}B_{ij}(x_1)B_{ji}(y_1)&=[p(y_1,x_1)^{-1}]_j[p(x_1,y_1)]_i\cdot B_{ji}((1+y_1x_1)y_1)B_{ij}((1+x_1y_1)^{-1}x_1)\\&=[p(x_1,y_1)]_iB_{ji}(y_1)B_{ij}(x_1)[p(y_1,x_1)^{-1}]_j\ (\text{应用}(2),(3)).\end{aligned}$$

故

$$B_{ij}(x_1)B_{ji}(y_1)[p(y_1,x_1)]_j=[p(x_1,y_1)]_iB_{ji}(y_1)B_{ij}(x_1).$$

定义 1 环 R 称为 n—fold,如 $a_1,\cdots,a_n,b_1,\cdots,b_n\in R$ 满足 $a_iR+b_iR=R(i=1,2,\cdots,n)$,则存在 $c\in R$ 使得 $a_i+b_ic\in U$.

若 $n=1$,R 称为 1—fold 环,也称为 Stable range 为 1 的环;此时若 c 可取为单位,则称 R 为单位稳定环. 此外,还有满足下面(*)的 1—fold 环.

(*) 若 $a,b\in R$,存在 $u\in U$ 使得 $a+u$ 与 $1+bu$ 都在 U 中.

定义 2 环 R 称为单位正则的,若 $a\in R$,存在 $u\in U$ 使得 $aua=a$.

单位正则环也是 1—fold 环. 对于单位正则环 R 中任一元 a,必有 $u\in U$ 使得 au 为幂等元.

1—fold 环是 GE_2—环(定义见[1]),故 1—fold 环上 $GL_2(R)$ 的元素间的任一代数关系均可写成(见[1]):

(11) $[\alpha,\beta]B_{ij}(x_1)B_{ji}(x_2)\cdots B_{ij}(x_n)=I$.

在下列条件下:

(i) $n\geqslant3$, $x_i\in U\ (1<i<n)$;

(ii) $n\geqslant3$, $p(x_i,x_{i+1})\in U\ (1<i<n)$;

(iii) $n\geqslant4$, $p(x_{i-1},x_i,x_{i+1})\in U\ (2<i<n)$.

(11)式都可缩短为

(11′) $[\alpha',\beta']B_{ij}(x'_1)B_{ji}(x'_2)\cdots B_{ji}(x'_{n-1})W_{ij}(v)=I$,

或

$$[\alpha',\beta']B_{ij}(x'_1)B_{ji}(x'_2)\cdots B_{ij}(x'_{n-2})W_{ij}(v)=I.$$

这里 v 取值 0,1 或—1.

注 在(11)式中,左边最后一项也可能为 $B_{ji}(x_n)$,按(11)的写法,可理想为 $x_n=0$. 但在上

面的三条件中，均指第 n 项不为平凡项.

我们只准备给在条件(iii)下(11)式的缩短的证明. 不妨设 $p(x_2,x_3,x_4)\in U$，那么由关系式(5″)

$$B_{ij}(x_1)B_{ji}(x_2)B_{ij}(x_3)B_{ji}(x_4)=B_{ij}(x_1)[p(x_2,x_3,x_4)]_j[p(x_4,x_3,x_2)^{-1}]_i$$
$$\cdot B_{ij}(p(x_4,x_3,x_2)p(x_3,x_4))B_{ji}(-p(x_2,x_3,x_4)^{-1}p(x_2,x_3))W_{ij}(1)$$
$$=[\alpha_1,\beta_1]B_{ij}(*)B_{ji}(*)W_{ij}(1)\quad (\text{应用}(2),(1)\text{式}).$$

显然，应用(3)，(8)可将(11)化为(11′).

今后我们将

(12) $[\alpha,\beta]B_{ij}(x_1)B_{ji}(x_2)\cdots B_{ij}(x_n)W_{ij}(v)=I$ (不出现上述三种情形)称为 $GL_2(R)$ 中元素代数关系的标准式.

二 主 要 结 果

命题 2 (i) 2—fold 环是单位稳定环.

(ii) 3—fold 环一定满足条件(*).

证明 (i) 令 $a,b\in R$ 满足 $aR+bR=R$，则存在 $c\in R$ 使得 $a+bc=u\in U$. 但 $cR+1\cdot R=R$，$(a+bc)R+bR=R$，由假设存在 $d\in R$ 使得

$$a+bc+bd=w\in U,\quad c+d=v\in U,$$

故 $a+b(c+d)=a+bv=w$. 即存在 $v\in U$ 使 $a+bv\in U$.

(ii) 因 3—fold 环必为 2—fold 环，故对 $(a,1)$，$(1,a')$ 这两个单模向量(即满足 $aR+1\cdot R=R$)，存在 $c\in R$ 使得

$$a+c=u\in U,\quad 1+a'c=v\in U,$$

但 $(c,1)$，$(a+c,1)$，$(1+a'c,a')$ 都是单模的，则有 $d\in R$ 使得

$$c+d=w\in U,\quad a+c+d=\delta\in U,\quad 1+a'c+a'd=\xi\in U,$$

即 $a+w=\delta$，$1+a'w=\xi$. 得证.

推论 1 (i) 若 R 为 3—fold 环，则

$$GL_2(I)/E_2(R,I)=GL_1(I)/[GL_1(R),GL_1(I)]=K_1(R,I),$$

(ii) 若 R 为 2—fold 环，则

$$GL_2(I)/E_2(R,I)=GL_1(I)/V(R,I)=K_1(R,I),$$

这里 $GL_1(I)=\{u\in U\mid u\equiv 1(\mathrm{mod} I)\}$，$V(R,I)=\{(1+ab)(1+ba)^{-1}\mid a\in R,b\in I,1+ab\in GL_1(I)\}$，$K_1(R,I)=UGL_n(I)/UE_n(R,I)$.

证明 (i)由命题 2 及[5]的定理 3 得出.

(ii)由命题 2 的证明易于推出 2—fold 环一定对理想 I 亦满足单位稳定条件，由[5]中定理 1 可得结论.

注 (i) [5]中定理 1(1b)的条件之一"$n\geqslant 2$"可以去掉.

(ii) 由 $K_1(R,I)=GL_1(I)/[GL_1(R),GL_1(I)]$ 或 $GL_1(I)/V(R,I)$ 并不能得出 R 是 Universal 或 Quasi—universal(定义见[2])，细情可见[2,p260].

定理 1 1—fold 环上的 $GL_2(R)$ 以关系式(1)—(4)及(5″)为其定义关系集.

证明 考察 $GL_2(R)$ 的元素间的代数关系的标准式(12). 我们知:(i)若 $n=0$,则 $\alpha=\beta=1$, $v=0$; (ii)$n=1$ 不可能; (iii)$n=2$,若 $v=0$,有 $x_1=x_2=0,\alpha=\beta=1$;但 $v=\pm1$ 为不可能; (iv)$n=3$,若 $v=0$,得 $x_2=0,x_1=-x_3,\alpha=\beta=1$;若 $v=\pm1$,推出 $x_2\in U$,矛盾(对 1-fold 环,若有 $xy=1$ 必有 $yx=1$). 所以(12)式的非平凡情况仅当 $n\geqslant4$ 才出现.

现考虑 $B_{ij}(x_1)B_{ji}(x_2)B_{ij}(x_3)B_{ji}(x_4)$, $(x_4\neq0)$. 因 $x_2R+(1+x_2x_3)R=R$,故存在 $y\in R$ 使得

$$x_2+(1+x_2x_3)y=x_2+y+x_2x_3y=p(x_2,x_3,y)\in U,$$

则

$$\begin{aligned}&B_{ij}(x_1)B_{ji}(x_2)B_{ij}(x_3)B_{ji}(x_4)=B_{ij}(x_1)B_{ji}(x_2)B_{ij}(x_3)B_{ji}(y)B_{ji}(-y)B_{ji}(x_4)\\&=B_{ij}(x_1)[p(x_2,x_3,y)]_j[p(y,x_3,x_2)^{-1}]_iB_{ij}(p(y,x_3,x_2)p(x_3,y))\\&\quad\cdot B_{ji}(-p(x_2,x_3,y)^{-1}p(x_2,x_3))W_{ji}(1)B_{ji}(-y+x_4)\text{(应用(5''),(1))}\\&=[p(x_2,x_3,y)]_j[p(y,x_2,x_3)^{-1}]_iB_{ij}(p(y,x_3,x_2)(x_1p(x_2,x_3,y)+p(x_3,y))\\&\quad\cdot B_{ji}(-p(x_2,x_3,y)^{-1}p(x_2,x_3))B_{ij}(y-x_4)W_{ij}(-1)\text{(应用(2),(7))}.\end{aligned}$$

因此(12)式左边变为

$$\begin{aligned}&[\alpha',\beta']B_{ij}(x'_1)B_{ji}(x'_2)B_{ij}(x'_3)W_{ij}(-1)B_{ij}(x_5)\cdots B_{ij}(x_n)W_{ij}(v)\text{(应用(2),(3))}\\&=[\alpha',\beta']B_{ij}(x'_1)B_{ji}(x'_2)B_{ij}(x'_3)B_{ji}(x'_4)\cdots B_{ji}(x'_{n-1})W_{ij}(v')\\&\qquad(v'=0\text{ 或 }-1,\text{应用(8),(6),(7),(2),(3)})\end{aligned}$$

该式与原(12)式左边相比,$B_{ij}(x)$ 与 $B_{ji}(x)$ 的总数至少减少 1,这个过程可继续下去,直到 $n\leqslant3$. 前面已阐述 $n\leqslant3$ 时仅有的关系式为 $B_{ij}(x)B_{ji}(-x)=I$,但这是关系式(1)的推论,证得结论.

定理 2 单位稳定环上的 $GL_2(R)$ 以关系式(1)-(4)及(5')为其定义关系集.

证明 由定理 1 的证明不妨假定 $n\geqslant4$. 考察(12)式左边的

$$B_{ij}(x_1)B_{ji}(x_2)B_{ij}(x_3)B_{ji}(x_4)\quad(x_4\neq0)$$

因 $(1+x_2x_3)R+x_2R=R$,存在 $t\in U$ 使得 $1+x_2x_3+x_2t=1+x_2(x_3+t)=p(x_2,x_3+t)\in U$. 我们写

$$\begin{aligned}&B_{ij}(x_1)B_{ji}(x_2)B_{ij}(x_3)B_{ji}(x_4)=B_{ij}(x_1)B_{ji}(x_2)B_{ij}(x_3+t)B_{ij}(-t)B_{ji}(x_4)\\&=B_{ij}(x_1)[p(x_3+t,x_2)^{-1}]_iB_{ij}(x_3+t)B_{ji}(x_2)[p(x_2,x_3+t)]_j\\&\quad\cdot B_{ij}(-t)B_{ji}(x_4)\ \text{(应用(5'),(1))},\end{aligned}$$

应用(2),(3)我们可将 $[p(x_2,x_3+t)^{-1}]_i$ 与 $[p(x_3+t,x_2)]_j$ 移至各项前面,重新标记前三项的元素,我们有

$$\begin{aligned}&[\alpha,\beta]B_{ij}(x_1)B_{ji}(x_2)\cdots B_{ij}(x_n)W_{ij}(v)\\&=[\alpha',\beta']B_{ij}(x'_1)B_{ji}(x'_2)B_{ij}(-t)B_{ji}(x_4)\cdots B_{ij}(x_n)W_{ij}(v).\end{aligned}$$

但 $t\in U$,应用(9),(8),(7),(6),(2),(3) 得

$$\begin{aligned}&[\alpha',\beta']B_{ij}(x'_1)B_{ji}(x'_2)B_{ij}(-t)B_{ji}(x_4)\cdots B_{ij}(x_n)W_{ij}(v)\\&=[\alpha'',\beta'']B_{ij}(x''_1)B_{ji}(x''_2)\cdots B_{ji}(x''_{n-1})W_{ij}(v')\quad(v'\text{ 取 }0,1\text{ 或 }-1).\end{aligned}$$

上式与原(12)式左边相比,$B_{ij}(x)$ 与 $B_{ji}(x)$ 的总数至少减少 1,这个过程可继续到 $n\leqslant3$,如同定理 1 的证明得出结论.

推论 2 2-fold 环上 $GL_2(R)$ 以关系式(1)-(4)及(5')为其定义关系集.

定理 3 满足条件(*)的 1-fold 环上的 $GL_2(R)$ 以关系式(1)-(5)为其定义关系集.

证明见[6].

推论 3　3—fold 环上的 $GL_2(R)$以关系式(1)—(5)为其定义关系集.

定理 4　单位正则环上 $GL_2(R)$以关系式(1)—(4)及(5′)为其定义关系集.

证明　首先我们指出:若 e 为幂等元,则 $1+ef(1-e), 1-(1-e)fe\in U$,这里 $f\in R$,因 $ef(1-e),(1-e)fe$ 均为幂零元. 再由 $p(e,f-fe)e=(1+ef-efe)e=e=e+efe-efe$ 知 $p(e,f-fe)^{-1}e=e$.

我们不妨假定在(12)式中 $n\geqslant 4$.

若$[\alpha,\beta]B_{ij}(x_1)B_{ji}(x_2)B_{ij}(x_3)B_{ji}(x_4)$中的 x_2 不为幂等元,因 R 为单位正则环,存在 $u\in U$ 使得 x_2u 为幂等元. 则

$$[\alpha,\beta]B_{ij}(x_1)B_{ji}(x_2)B_{ij}(x_3)B_{ji}(x_4)=[\alpha,\beta]B_{ij}(x_1)B_{ji}(x_2)[u,1]_{ij}\cdot[u^{-1},1]_{ij}B_{ij}(x_3)B_{ji}(x_4).$$

应用(2),(3)可将上式左边化为(仍用原记号)

$$[\alpha,\beta]B_{ij}(x_1)B_{ji}(x_2)B_{ij}(x_3)B_{ji}(x_4)[u,i]_{ij}$$

但 x_2 为幂等元.　则

$$\begin{aligned}
&B_{ij}(x_1)B_{ji}(x_2)B_{ij}(x_3)B_{ji}(x_4)=B_{ij}(x_1)B_{ji}(x_2)B_{ij}(x_3-x_3x_2)B_{ij}(x_3x_2)B_{ji}(x_4)\\
&=B_{ij}(x_1)[p(x_3-x_3x_2,x_2)^{-1}]_iB_{ij}(x_3-x_3x_2)B_{ji}(x_2)[p(x_2,x_3-x_3x_2)]_j\\
&\quad\cdot B_{ij}(x_3x_2)B_{ji}(x_4)\ (\text{应用}(5'),(1))\\
&=[\gamma,\delta]B_{ij}(x'_1)B_{ji}(p(x_2,x_3-x_3x_2)^{-1}x_2)B_{ij}(x_3x_2)B_{ji}(x_4)\\
&=[\gamma,\delta]B_{ij}(x'_1)B_{ji}(1)B_{ji}(-1+x_2)B_{ij}(x_3x_2)B_{ji}(x_4)\\
&=[\gamma,\delta]B_{ij}(x'_1)B_{ji}(1)[p(x_3x_2,-1+x_2)^{-1}]_iB_{ij}(x_3x_2)B_{ji}(-1+x_2)\\
&\quad\cdot[p(x_2,x_3-x_3x_2)]_jB_{ji}(x_4)\ (\text{应用}(5'),\text{因 }1-(1-x_2)x_3x_2\in U)\\
&=[\gamma',\delta']B_{ij}(x''_1)B_{ji}(u)B_{ij}(x'_3)B_{ji}(x'_4)\ (\text{应用}(2),(3),(1)).
\end{aligned}$$

上式中 $u\in U$. 这样(12)式左边变为

$$[\alpha',\beta']B_{ij}(x''_1)B_{ji}(u)B_{ij}(x'_3)B_{ji}(x'_4)[u,1]_{ij}B_{ij}(x_5)\cdots B_{ij}(x_n)W_{ij}(v).$$

应用(9),(8),(7),(6),(2),(3)又可将其化为

$$[\alpha'',\beta'']B_{ij}(x'''_1)B_{ji}(x'''_2)\cdots B_{ji}(x'''_{n-1})W_{ij}(v')\quad(v'\text{ 取值 }0,1\text{ 或 }-1).$$

显然上式中 $B_{ij}(x)$与 $B_{ji}(x)$的总个数比原(12)式至少减少 1,这个过程可继续到 $n\leqslant 3$,以下同定理 1. 证毕.

由[1],[2]及本文的结果可以看出几乎所有常见的 1—fold 环(局部环,半局部环,C^*—代数(满足条件(*),单位正则环等)上的 $GL_2(R)$都以(1)—(4)及(5′)(或(1)—(5))为其定义关系集. 因此,自然会提出这样一个问题:1—fold 环上的 $GL_2(R)$能否以(1)—(4)及(5′)为其定义关系集? 笔者估计可能不行,但希望能给出例子.

参 考 文 献

[1]　P. M. Chon, *On the structure of the GL_2 of a ring*, I. H. E. S. Publ. Math. 30(1966) 5—54.

[2]　J. R. Silvester, *On the GL_n of a semi—local ring*, Lect. Notes in Math. 966(1981) 244—260.

[3] J. R. Silvester, *On the K_2 of a free associative algebra*, ,Proc. London Math. Soc. Ⅲ Ser 26 (1973) 35—56.
[4] M. Kolster, *General symblos and presentations of elementary linear groups*, J. Reine Angew. Math. 353(1984) 132—164.
[5] L. Vaserstein and B. Magurn, *Prestabilization for K_1 of Banach algebra*, Lin. Algebra and its Appl. 95(1987) 69—96.
[6] 游宏，稳定环与其上的二维线性群，数学年刊(A 辑) 7(1986) 255—266.

On the Defining Relations of GL_2 over 1-Fold Rings

You Hong
(Northeast Normal University, Changchun, China)

Abstract

The following identities hold for any associative ring with identity 1:

(1) $B_{ij}(x)B_{ij}(y) = B_{ij}(x+y)$;

(2) $B_{ij}(x)[\alpha_1,\alpha_2] = [\alpha_1,\alpha_2]B_{ij}(\alpha_i^{-1}x\alpha_j)$ ($[\alpha_1,\alpha_2]=[\alpha_1]_1[\alpha_2]_2$);

(3) $[\alpha_1,\alpha_2][\beta_1,\beta_2] = [\alpha_1\beta_1,\alpha_2\beta_2]$;

(4) $B_{ij}(x) = B_{ji}(1)B_{ij}(-1)B_{ji}(-x)B_{ij}(1)B_{ji}(-1)$;

(5) $B_{ij}(\alpha-1)B_{ji}(1) = D_{ij}(\alpha)B_{ji}(\alpha)B_{ij}(1-\alpha^{-1})$ $(\alpha\in U)$;

(5′) $B_{ij}(x)B_{ji}(y)[P(y,x)]_j = [P(x,y)]_iB_{ji}(y)B_{ij}(x)$ $(P(x,y)=1+xy\in U)$;

(5″) $$B_{ij}(x)B_{ji}(y)B_{ij}(z) = [P(x,y,z)]_i[P(z,y,x)]_j^{-1}\times B_{ji}(P(z,y,x)P(y,z) \cdot B_{ij}(-P(x,y,z)^{-1}P(x,y))W_{ij}(1)\quad (P(x,y,z)=x+z+xyz\in U).$$

Where $B_{ij}(x) = I^{(2)} + xe_{ij}$ $(i\neq j,\ 1\le i,j\le 2)$, $[\alpha]_i = I^{(2)}+(\alpha-1)e_{ii}$ $(\alpha\in U,\ i=1,2)$, and e_{ij} denotes the matrix unit; further, $[\alpha,\beta]_{ij}=[\alpha]_i[\beta]_j$, $D_{ij}(\alpha)=[\alpha,\alpha^{-1}]_{ij}$ $(\alpha\in U)$, and $W_{ij}(v)=B_{ij}(v)B_{ji}(-v^{-1})B_{ij}(v)$ $(v=1,-1$ or $0)$.

In the present paper, we proved

Theorem 1 The relations (1)-(4) and (5″) form a complete set of defining relations for GL_2 over 1-fold rings.

Theorem 2 The relations (1)-(4) and (5′) form a complete set of defining relations for GL_2 over unit stable rings.

Theorem 3 The relations (1)-(5) form a complete set of defining relations for GL_2 over 3-fold rings.

Theorem 4 The relations (1)-(4) and (5′) form a complete set of defining relations for GL_2 over unit regular rings.