第12卷第3期　　数学研究与评论　　Vol. 12 No. 3
1992年8月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Aug. 1992

关于L－函数的二次均值公式*

俞孔模
(浙江师范大学数学系，金华 321004)

摘要

本文利用三角和估值的指数偶方法，改进了张文鹏关于Dirichlet L－函数的二次均值

$$\sum_{\chi \bmod q} |L(\frac{1}{2}+it,\chi)|^2$$

的一个渐近公式.

§1 引言

对模$q\geqslant 3$，设χ表示q的Dirichlet特征，$L(s,\chi)$是对应于χ的L－函数. 本文的主要目的是借助于三角和估值的指数偶方法研究L－函数的二次均值

$$\sum_{\chi \bmod q} |L(\frac{1}{2}+it,\chi)|^2$$

的渐近性质.

1975年，Gallagber[1]得到

$$\sum_{\chi \bmod q} |L(\frac{1}{2}+it,\chi)|^2 = O((g+|t|)\log(q(\frac{1}{2}+|t|))).$$

1980年，Balasubramanian[2]证明了渐近式

$$\sum_{\chi \bmod q} |L(\frac{1}{2}+it,\chi)|^2 = \frac{\varphi^2(q)}{q}\log(qt) + O(q(\log\log q)^2)$$
$$+ O(te^{10(\log q)^{\frac{1}{2}}} + O(q^{\frac{1}{2}}t^{\frac{2}{3}}e^{10(\log q)^{\frac{1}{2}}})$$

对所有g和$t\geqslant 3$成立，并由此容易推出

$$\sum_{\chi \bmod q} |L(\frac{1}{2}+it,\chi)|^2 \sim \frac{\varphi^2(q)}{q}\log|qt|,\ 3\leqslant |t| \leqslant q^{\frac{3}{4}}-\varepsilon.$$

1990年，张文鹏[3]给出了质的改进，他证明了：对任意模q及实数$t\geqslant 3$，有

$$\sum_{\chi \bmod q} |L(\frac{1}{2}+it,\chi)|^2 = \frac{\varphi^2(q)}{q}[\log(\frac{qt}{2\pi}) + 2r + \sum_{p|q}\frac{\log p}{p-1}] + O(qt^{-\frac{1}{12}})$$
$$+ O[(t^{\frac{r}{6}} + q^{\frac{1}{2}}t^{\frac{r}{12}})\exp(\frac{2\log(qt)}{\log\log(qt)})], \tag{1}$$

* 1990年6月1日收到.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

其中 r 为 Euler 常数，$\sum_{p|q}$ 表示对 q 所有不同素因子求和.

推论 1 对任意给定的 $\varepsilon>0$，当 $3\leqslant|t|\leqslant q^{\frac{6}{5}-\varepsilon}$ 时有 $\sum_{\chi\bmod q}|L(\frac{1}{2}+it,\chi)|^2\sim\frac{\varphi^2(q)}{q}\log|qt|$.

推论 2 当 $\log\log q\leqslant|t|\leqslant q^{\frac{6}{5}-\varepsilon}$ 时有

$$\sum_{\chi\bmod q}|L(\frac{1}{2}+it,\chi)|^2\sim\frac{\varphi^2(q)}{q}[\log|\frac{qt}{2\pi}|+2r+\sum_{p|q}\frac{\log p}{p-1}].$$

本文以三角和估值的指数偶方法为工具，改进了张文鹏的工作，给出了新的渐近公式：

定理 对任意模 q 及实数 $t\geqslant3$，有

$$\sum_{\chi\bmod q}|L(\frac{1}{2}+it,\chi)|^2=\frac{\varphi^2(q)}{q}[\log|\frac{qt}{2\pi}|+2r+\sum_{p|q}\frac{\log p}{p-1}]+O(qt^{-\frac{1}{8}})$$
$$+O[(t^{\frac{3}{4}}+q^{\frac{1}{2}}t^{\frac{3}{8}})\exp(\frac{2\log(qt)}{\log\log(qt)})]. \qquad (2)$$

推论 1 当 $3\leqslant|t|\leqslant q^{\frac{4}{3}-\varepsilon}$ 时，有 $\sum_{\chi\bmod q}|L(\frac{1}{2}+it,\chi)|^2\sim\frac{\varphi^2(q)}{q}\log|gt|$.

推论 2 当 $\log\log q\leqslant|t|\leqslant q^{\frac{4}{3}-\varepsilon}$ 时，有

$$\sum_{\chi\bmod q}|L(\frac{1}{2}+it,\chi)|^2\sim\frac{\varphi^2(q)}{q}[\log|\frac{qt}{2\pi}|+2r+\sum_{p|q}\frac{\log p}{p-1}].$$

记号：设 C,C_1,C_2 为正常数，$A>0$

$B=O(A)$，$B<<A$ 表示 $|B|\leqslant CA$；

$B\backsimeq A$ 表示 $C_1A\leqslant B\leqslant C_2A$ 或 $C_1A\leqslant-B\leqslant C_2A$；

$f(x)\sim g(x)$ 表示 $\frac{f(x)}{g(x)}\to1$ $(x\to\infty)$；

$e(x)=e^{2\pi ix}$；$e_q(x)=e^{\frac{2\pi ix}{q}}$；$\exp(x)=e^x$；

$\varepsilon,\varepsilon_1,\varepsilon_2$ 表示任意小的正数.

§2 若 干 引 理

引理 1[3] 对任一模 q 及实数 $t\geqslant2$，有

$$\sum_{\chi\bmod q}|L(\frac{1}{2}+it,\chi)|^2=\frac{\varphi^2(q)}{q}\sum_{d|q}\mu(d)\sum_{n=1}^{q|d}|\zeta(\frac{1}{2}+it,\frac{n}{q|d})|^2,$$

其中 $\zeta(s,a)$ 为 Hurwitz Zeta一函数.

引理 2[3] 对整数 $q\geqslant2$，有

$$\sum_{d|q}\frac{\mu(d)\log d}{d}=-\frac{\varphi(q)}{q}\sum_{p|q}\frac{\log p}{p-1}.$$

定义 设 $f(x,y)$ 为实函数，且 $\frac{\partial f(x,y)}{x}\simeq L_1$ $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\simeq L_2$. 和 $L_1>>1$，$L_2>>1$. 如果下式成立

$$\sum\sum_{(m,n)\in D}e(f(m,n))<<(L_1L_2)^k(MN)^l.$$

其中 $D:\{(m,n)|M<n\leqslant M',N<n<N',M'\leqslant2M,N'\leqslant2N\}$. 我们称 (k,l) 为二维指数偶，例如

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

$(0,1)$为二维指数偶.

文献[5,p215]指出:如果(k,l)为二维指数偶,则

$$A(k,l)=(\frac{k}{4k+2},\frac{3k+l+1}{4k+2}), \tag{3}$$

$$B(k,l)=(l-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}). \tag{4}$$

此为二维指数偶.

引理 3 $(\frac{1}{8},\frac{3}{4}),(\frac{1}{4},\frac{5}{8})$为二维指数偶.

证明 由文献[4]中定理 9 知$(\frac{1}{8},\frac{3}{4})$为二维指数偶,应用(4)式知 $B(\frac{1}{8},\frac{3}{4})=(\frac{1}{4},\frac{5}{8})$也为二维指数偶.

引理 4[6] 设 $f(x)$为实函数,$f'(x)\simeq\lambda_1$,且 $f^{(p)}(x)\simeq\frac{\lambda_1}{M^{p-1}}$, $(p=1,2,\cdots)$,(k,l)为一维指数偶,则

$$\sum_{M<x\leqslant 2M}e(f(x))<<\lambda_1^kM^l,\quad(\lambda_1>>1).$$

引理 5 设整数 q 及实数 $t\geqslant 3$,则

$$\sum_{a=1}^{q}(\frac{q}{a})^{\frac{1}{2}+it}\zeta_1(\frac{1}{2}-it,\frac{a}{q})=O(qt^{-\frac{1}{4}}\log t)+O(q^{\frac{1}{2}}t^{\frac{3}{8}}\log q\log t).$$

其中 $\zeta_1(s,a)=\zeta(s,a)-a^{-s}$.

证明 由 Hurwitz Zeta—函数的迫近方程可得

$$\zeta_1(\frac{1}{2}+it,a)=\sum_{1\leqslant n\leqslant x}\frac{1}{(n+a)^{\frac{1}{2}+it}}+(\frac{2\pi}{t})^{it}e^{i(t+\frac{\pi}{4})}\sum_{1\leqslant n\leqslant y}n^{-\frac{1}{2}+it}e(-na)+O(x^{-\frac{1}{2}}\log t), \tag{5}$$

其中 $1\leqslant x\leqslant y,2\pi xy=t$.

在(5)中取 $x=y=\sqrt{\frac{t}{2\pi}}$,可得

$$\sum_{a=1}^{q}(\frac{q}{a})^{\frac{1}{2}+it}\zeta_1(\frac{1}{2}-it,\frac{a}{q})=O(|\sum_{1\leqslant n\leqslant x}\sum_{1\leqslant a\leqslant q}\frac{(\frac{q}{a})^{\frac{1}{2}+it}}{(n+\frac{a}{q})^{\frac{1}{2}-it}}|)+O(qt^{-\frac{1}{4}}\log t)$$

$$+O(\sum_{1\leqslant n\leqslant y}\sum_{1\leqslant a\leqslant q}(\frac{q}{a})^{\frac{1}{2}+it}n^{-\frac{1}{2}-it}e_q(na)|). \tag{6}$$

设 $J=\sum_{1\leqslant n\leqslant x}\sum_{1\leqslant a\leqslant q}\frac{(\frac{q}{a})^{\frac{1}{2}+it}}{(n+\frac{a}{q})^{\frac{1}{2}-it}}$,

1) 当 $a\geqslant t$ 时,由[3]中(5)式我们有

$$J<<qt^{-\frac{3}{4}}+q^{\frac{1}{2}}t^{-\frac{1}{4}}.\quad(x=\sqrt{\frac{t}{2\pi}});$$

2) 当 $1\leqslant a<t$,我们把和 J 分成为$<<\log q\log t$ 个具有形式

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

$$S=\sum_{N<n\leqslant 2N}\sum_{A<a\leqslant 2A}\frac{(\frac{q}{a})^{\frac{1}{2}+it}}{(n+\frac{a}{q})^{\frac{1}{2}-it}}$$

的和，这里 $1\leqslant N<2N\leqslant x,1\leqslant A<2A<t$，由于

$$g(n,a)=a^{-\frac{1}{2}}(n+\frac{a}{q})^{-\frac{1}{2}}$$

为正的实递减函数，应用 Abel 变换我们有

$$S<<q^{\frac{1}{2}}(AN)^{-\frac{1}{2}}|S_1|,$$

其中 $S_1=\sum\limits_{N<n\leqslant N'}\sum\limits_{A<a\leqslant A'}e(f(a,n))$. 这里 $N'\leqslant 2N,A'\leqslant 2A,f(a,n)=\frac{t}{2\pi}(\log(nq+a)-\log a)$，那么

$$\frac{\partial f(a,n)}{\partial a}=\frac{t}{2\pi}(\frac{1}{nq+a}-\frac{1}{a})\simeq\frac{t}{A}=L_1,$$

$$\frac{\partial f(a,n)}{\partial n}=\frac{t}{2\pi}\cdot\frac{q}{nq+a}\simeq\frac{t}{N}=L_2.$$

由条件 $A<t,N\leqslant x=t^{\frac{1}{2}}$，则有 $L_1>>1,L_2>>1$.

i) 当 $NA\leqslant t$ 时，由定义并取 $(k,l)=(\frac{1}{8},\frac{3}{4})$（引理 3）我们有

$$S_1<<(\frac{t}{A}\cdot\frac{t}{N})^{\frac{1}{8}}(AN)^{\frac{3}{4}}=t^{\frac{1}{4}}(AN)^{\frac{5}{8}},$$

因此

$$S<<q^{\frac{1}{2}}t^{\frac{1}{4}}(AN)^{\frac{1}{8}}<<q^{\frac{1}{2}}t^{\frac{3}{8}}. \tag{7}$$

ii) 当 $NA>t$ 时，由定义并取 $(k,l)=(\frac{1}{4},\frac{5}{8})$（引理 3）我们有

$$S_1<<(\frac{t}{A}\cdot\frac{t}{N})^{\frac{1}{4}}(AN)^{\frac{5}{8}}=t^{\frac{1}{2}}(AN)^{\frac{3}{8}}.$$

因此

$$S<<q^{\frac{1}{2}}t^{\frac{1}{2}}(AN)^{-\frac{1}{8}}<<q^{\frac{1}{2}}t^{\frac{3}{8}}. \tag{8}$$

综合 1)，2) 立得

$$J<<q^{\frac{1}{2}}t^{\frac{3}{8}}\log q\log t+qt^{-\frac{3}{4}}. \tag{9}$$

类似地

$$\Big|\sum_{1\leqslant n\leqslant\sqrt{\frac{t}{2\pi}}}\sum_{1\leqslant a\leqslant q}\frac{q^{\frac{1}{2}+it}e_q(na)}{a^{\frac{1}{2}+it}n^{\frac{1}{2}+it}}\Big|<<qt^{-\frac{3}{4}}+q^{\frac{1}{2}}t^{\frac{3}{8}}\log q\log t. \tag{10}$$

综合(6)，(9)和(10)可以得出本引理.

引理 6 对任一整数 q 及实数 $t\geqslant 3$，有

$$\sum_{1\leqslant a\leqslant q}|\zeta_1(\frac{1}{2}+it,\frac{a}{q})|^2=q[\log(\frac{t}{2\pi})+r]+O(qt^{-\frac{1}{8}})+O(t^{\frac{3}{4}}\log^2 t),$$

其中 r 为 Euler 常数.

证明 设 $A(t)=(\frac{2\pi}{t})^{it}e^{i(t+\frac{\pi}{4})}$，$x<y$，$2\pi xy=t$. 又设

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

$$I_1(a)=\sum_{1\leqslant n\leqslant x}(n+a)^{-\frac{1}{2}-it},\ I_2(a)=A(t)\sum_{1\leqslant n\leqslant y}n^{-\frac{1}{2}+it}e(-na),$$

那么使用迫近方程(5)我们有

$$\sum_{1\leqslant a\leqslant q}|\zeta_1(\frac{1}{2}+it,\frac{a}{q})|^2=\sum_{1\leqslant a\leqslant q}[|I_1(\frac{a}{q})|^2+|I_2(\frac{a}{q})|^2+I_1(\frac{a}{q})\overline{I_2(\frac{a}{q})}+\overline{I_1(\frac{a}{q})}I_2(\frac{a}{q})]$$

$$+O(x^{-\frac{1}{2}}\log t\sum_{1\leqslant a\leqslant q}|I_1(\frac{a}{q})+I_2(\frac{a}{q})|)+O(qt^{-1}\log^2 t). \tag{11}$$

现在分别估计(11)式中各项的和式，注意到

$$A(t)\overline{A(t)}=1,\ \sum_{1\leqslant a\leqslant q}e_q(na)=\begin{cases}q, & q|n\\ 0, & q\not| n.\end{cases}$$

由文献[3]中(11)和(17)式我们有

$$\sum_{1\leqslant a\leqslant q}|I_2(\frac{a}{q})|^2=q(\log y+\gamma)+O(qy^{-1}+y), \tag{12}$$

$$\sum_{1\leqslant a\leqslant q}|I_1(\frac{a}{q})|^2=q\log x+O(gx^{-1})+O(t^{\frac{1}{2}}x\log t)+O(gx^2t^{-1}\log t). \tag{13}$$

现在估计主要误差项

$$\sum_{1\leqslant a\leqslant q}I_1(\frac{a}{q})\overline{I_2(\frac{a}{q})}.$$

反复应用迫近方程(5)有[3]

$$I_2(\frac{a}{q})=A(t)\sum_{1\leqslant m\leqslant y}m^{-\frac{1}{2}+it}e_q(-ma)=A(t)\sum_{1\leqslant m\leqslant\sqrt{\frac{t}{2\pi}}}m^{-\frac{1}{2}+it}e_q(-ma)$$

$$+\sum_{x<n\leqslant\sqrt{\frac{t}{2\pi}}}(n+\frac{a}{q})^{-\frac{1}{2}-it}+O(x^{-\frac{1}{2}}\log t),\ 1\leqslant x<y,\ 2\pi xy=t. \tag{14}$$

设 $R=\sum_{1\leqslant a\leqslant q}\sum_{1\leqslant n\leqslant x}\sum_{x<m\leqslant\sqrt{\frac{t}{2\pi}}}(m+\frac{a}{q})^{-\frac{1}{2}+it}(n+\frac{a}{q})^{-\frac{1}{2}-it}$,

i) 当 $t\leqslant\frac{mnq}{m-n}$ 时，由[3]中(14)式我们有

$$|\sum_{1\leqslant a\leqslant q}(m+\frac{a}{q})^{-\frac{1}{2}+it}(n+\frac{a}{q})^{-\frac{1}{2}-it}|<<\frac{q}{t}\frac{\sqrt{mn}}{m-n}+\frac{1}{\sqrt{mn}}; \tag{15}$$

ii) 当 $t>\frac{mnq}{m-n}$ 时，令 $f(a)=\frac{t}{2\pi}(\log(mq+a)-\log(nq+a))$，则有

$$f'(a)=\frac{t}{2\pi}(\frac{1}{mq+a}-\frac{1}{nq+a})\simeq\frac{(m-n)t}{mnq}=\lambda_1,$$

$$f^{(p)}(a)\simeq\frac{\lambda_1}{A^{p-1}}\quad(p=1,2,\cdots,A<a\leqslant 2A).$$

应用引理4，并取 $(k,l)=(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ 我们有

$$|\sum_{1\leqslant a\leqslant q}(m+\frac{a}{q})^{-\frac{1}{2}+it}(n+\frac{a}{q})^{-\frac{1}{2}-it}|<<\frac{\log q}{\sqrt{mn}}\max_{1\leqslant A\leqslant q}|\sum_{A<a\leqslant 2A}e(f(a))|$$

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

$$\ll \frac{\log t}{\sqrt{mn}}\left(\frac{(m-n)t}{mnq}\right)^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}} \ll \frac{t^{\frac{1}{2}}\log t}{m^{\frac{1}{2}}n}. \tag{16}$$

由(15),(16)及

$$\sum_{1\leqslant n\leqslant x}\ \sum_{x<m\leqslant\sqrt{\frac{t}{2\pi}}}\frac{\sqrt{mn}}{m-n} \ll x^{\frac{3}{2}}t^{\frac{1}{4}}\sum_{r=1}^{t^{\frac{1}{2}}}\frac{1}{r} \ll x^{\frac{3}{2}}t^{\frac{1}{4}}\log t,$$

我们有

$$|R| \leqslant \sum_{1\leqslant n\leqslant x}\ \sum_{x<m\leqslant\sqrt{\frac{t}{2\pi}}}\left|\sum_{1\leqslant a\leqslant q}\left(m+\frac{a}{q}\right)^{-\frac{1}{2}+it}\left(n+\frac{a}{q}\right)^{-\frac{1}{2}-it}\right|$$

$$\ll \sum_{1\leqslant n\leqslant x}\ \sum_{x<m\leqslant\sqrt{\frac{t}{2\pi}}}\left(\frac{q}{t}\frac{\sqrt{mn}}{m-n}+\frac{1}{\sqrt{mn}}+\frac{t^{\frac{1}{2}}}{m^{\frac{1}{2}}n}\right)\log t$$

$$\ll \left(qx^{\frac{3}{2}}t^{-\frac{3}{4}}+x^{\frac{1}{2}}t^{\frac{1}{4}}+t^{\frac{3}{4}}\right)\log^2 t. \tag{17}$$

下面研究

$$\sum_{1\leqslant a\leqslant q}\ \sum_{1\leqslant n\leqslant x}\ \sum_{1\leqslant m\leqslant\sqrt{\frac{t}{2\pi}}}\left(n+\frac{a}{q}\right)^{-\frac{1}{2}-it}m^{-\frac{1}{2}-it}e_q(ma).$$

i) 当 $t\leqslant nq$ 时,由[3]中(21)式有

$$\left|\sum_{1\leqslant a\leqslant q}\left(n+\frac{a}{q}\right)^{-\frac{1}{2}-it}e_q(ma)\right| \ll qt^{-1}n^{\frac{1}{2}}+n^{-\frac{1}{2}}. \tag{18}$$

ii) 当 $t>nq$,设

$$f(a)=\frac{t}{2\pi}\log\left(n+\frac{a}{q}\right)-\frac{ma}{q},\ g(a)=\left(n+\frac{a}{q}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

那么 $f'(a)$ 为单调减函数,$g(a)$,$g'(a)$ 也是实正单调递减函数,且

$$f'(a)=\frac{t}{2\pi(nq+a)}-\frac{m}{q}\simeq\frac{t}{nq}=\lambda_1\geqslant 1, \tag{19}$$

$$f^{(p)}(a)\simeq\frac{\lambda_1}{A^{p-1}}\quad(p=1,2,\cdots,\ A<a\leqslant 2A),$$

于是,依据引理 1,并取一维指数偶 $(k,l)=(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ 及(19)式我们有

$$\left|\sum_{1\leqslant a\leqslant q}\left(n+\frac{a}{q}\right)^{-\frac{1}{2}-it}e_q(ma)\right| \ll \frac{\log q}{\sqrt{n}}\max_{1\leqslant A\leqslant q}\left|\sum_{A<a\leqslant 2A}e(f(a))\right|$$

$$\ll \frac{\log q}{\sqrt{n}}\left(\frac{t}{nq}\right)^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}} \ll \frac{t^{\frac{1}{2}}\log t}{n}. \tag{20}$$

综合(14),(17),(18)和(20)我们有

$$\left|\sum_{1\leqslant a\leqslant q}I_1\left(\frac{a}{q}\right)\overline{I_2\left(\frac{a}{q}\right)}\right| \ll \left(qx^{\frac{3}{2}}t^{-\frac{3}{4}}+x^{\frac{1}{2}}t^{\frac{1}{4}}+t^{\frac{3}{4}}\right)\log^2 t$$

$$+\sum_{1\leqslant n\leqslant x}\ \sum_{1\leqslant m\leqslant\sqrt{\frac{t}{2\pi}}}\frac{1}{\sqrt{m}}\left(qt^{-1}n^{\frac{1}{2}}+n^{-\frac{1}{2}}+\frac{t^{\frac{1}{2}}\log t}{n}\right)$$

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

$$\ll (qx^{\frac{3}{2}}t^{-\frac{3}{4}} + x^{\frac{1}{2}}t^{\frac{1}{4}} + t^{\frac{3}{4}})\log^2 t. \tag{21}$$

由[3]中(24),(25)式可得

$$\sum_{1\leqslant a\leqslant q} |I_1(\frac{a}{q})| \ll q\log^{\frac{1}{2}} t. \tag{22}$$

$$\sum_{1\leqslant a\leqslant q} |I_2(\frac{a}{q})| \ll q\log^{\frac{1}{2}} t. \tag{23}$$

取 $x=t^{\frac{1}{4}}\log^3 t$, $y=\frac{t}{2\pi x}$,结合(11),(12),(13),(21),(22)和(23)式我们有

$$\sum_{1\leqslant a\leqslant q} |\zeta_1(\frac{1}{2}+it,\frac{a}{q})|^2 = q(\log(\frac{t}{2\pi})+r) + O(qt^{-\frac{1}{8}}) + O(t^{\frac{3}{4}}\log^2 t).$$

于是完成了引理 6 的证明.

§3 定理的证明

由于 $\zeta(\frac{1}{2}+it,a)=\zeta_1(\frac{1}{2}+it,a)+a^{-\frac{1}{2}-it}$,以及 $\sum_{a=1}^{q}\frac{1}{a}=\log q+r+O(q^{-1})$,由引理 5 和引理 6 我们有

$$\sum_{1\leqslant a\leqslant q} |\zeta(\frac{1}{2}+it,\frac{a}{q})|^2 = q[\log(\frac{qt}{2\pi})+2r]\gamma + O(qt^{-\frac{1}{8}}) + O(t^{\frac{3}{4}}\log^3 t) + O(q^{\frac{1}{2}}t^{\frac{3}{8}}\log^3 t). \tag{24}$$

由引理 1 及(24)式可得

$$\begin{aligned}\sum_{\chi\bmod q} |L(\frac{1}{2}+it,\chi)|^2 &= \frac{\varphi(q)}{q}\sum_{d|q}\mu(d)\sum_{n=1}^{q/d}|\zeta(\frac{1}{2}+it,\frac{n}{q/d})|^2\\
&=\frac{\varphi(q)}{q}\sum_{d|q}\mu(d)\{\frac{q}{d}[\log(\frac{qt}{2\pi})+2r]+O(\frac{q}{d}t^{-\frac{1}{8}})+O(t^{\frac{3}{4}}\log^3 t)+O(q^{\frac{1}{2}}d^{-\frac{1}{2}}t^{\frac{3}{8}}\log^3 t)\}\\
&=\frac{\varphi^2(q)}{q}[\log(\frac{qt}{2\pi})+2r]-\varphi(q)\sum_{d|q}\frac{\mu(d)\log d}{d}\\
&\quad+O[(t^{\frac{3}{4}}+q^{\frac{1}{2}}t^{\frac{3}{8}})\sum_{d|q}|\mu(d)|\log^3 t]+O(\varphi(q)t^{-\frac{1}{8}}\sum_{d|q}\frac{|\mu(d)|}{d}).\end{aligned} \tag{25}$$

注意到估计式

$$\varphi(q)\sum_{d|q}\frac{\mu|(d)|}{d} \ll q,\quad \sum_{d|q}|\mu(d)| \ll \exp(\frac{\log q}{\log\log q}),$$

由(25)和引理 2 就可以得出定理.

参 考 文 献

[1] Gallagher, P. X., *Local mean value and density estimates for Dirichlet L—series*. Indag. Math. 37(1975), 259—264.

[2] Balasubramanian, R., *A note on Dirichlet L—functions*, Acta Arith., 38(1980), 273—283.

[3] 张文鹏,关于L—函数的二次均值公式,数学年刊(A辑), 11(1990), 121—127.

[4] Srinirasan, B. R., *The lattice point problem of may dimensional hyperboloids*, Ⅱ, Math. Ann. (1965), 160, 280

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

—231.

[5] Graham, S. W., *An a algorithm for computing optimal exponent pairs*, J. London Math. Soc. (2) 33(1986), 203—218.

[6] 贾朝华，小区间中整数的最大素因子（Ⅱ），数学学报，32:2 (1989), 188—199.

On the Mean Square Value Formula of Dirichlet L-Functions

Yu Kongting

(Dept. of Math, Zhejiang Normal University, Jinhua, China)

Abstract

In this paper we improve the asymptotic formula obtained by Zhang Wenpeng about the mean square value of Dirichlet L-functions:

$$\sum_{\chi \bmod q} |L(\frac{1}{2}+it,\chi)|^2$$

by using the method of expotential pairs for the trigonometric sum.

We proved the following Theorem:

Theorem For any mod q and real $t \geq 3$ we have

$$\sum_{\chi \bmod q} |L(\frac{1}{2}+it,\chi)|^2 = \frac{\varphi^2(q)}{q}[\log(\frac{qt}{2\pi})+2r+\sum_{p|q}\frac{\log p}{p-1}] + O(qt^{-\frac{1}{8}}) + O[(t^{\frac{3}{4}}+q^{\frac{1}{2}}t^{\frac{3}{8}})\exp(\frac{2\log(qt)}{\log\log(qt)})].$$

Where r is Euler's constant.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.