几个非线性演化方程的解析解*

张 卫 国
(长沙铁道学院，410075)

摘 要

本文我们求出了K－P方程 $u_{xt}+6(uu_x)_x+u_{xxxx}+3k^2u_{yy}=0$ 和Boussinesq方程 $u_{tt}-u_{xx}-6(u^2)_{xx}-u_{xxxx}=0$ 的孤立波解族．求出了广义Schrödinger方程 $iu_t-u_{xx}-u_{yy}+\beta|u|^2u=0$ 和Klein－Gordon方程 $u_{tt}-(u_{xx}+u_{yy})+\mu^2u+\beta|u|^2u=0$ 的一类解析解．

§1 引 言

文献[1][2][3]给出了如下四个重要的非线性方程：K－P(Kadomtzev－Pitviashivili)方程

$$u_{xt}+6(uu_x)_x+u_{xxxx}+3k^2u_{yy}=0, \tag{1.1}$$

Boussinesq方程

$$u_{tt}-u_{xx}-6(u^2)_{xx}-u_{xxxx}=0, \tag{1.2}$$

广义Schrödinger方程

$$iu_t+u_{xx}-u_{yy}+\beta|u|^2u=0, \tag{1.3}$$

Klein－Gordon方程

$$u_{tt}-(u_{xx}+u_{yy})+\mu^2u+\beta|u|^2u=0. \tag{1.4}$$

[4]中曾求得(1.1)(1.2)的当 $|\xi|\to\infty$ 时，$u(\xi)$、$u'(\xi)$、$u''(\xi)u'''(\xi)\to 0$ 的孤波解，还求出了(1.3)(1.4)的一类准确解．本文我们将求出方程(1.1)(1.2)的渐近值不为零的孤波解族．求出方程(1.3)(1.4)的异于[4]中所给的一类新解析解．

注意到，若我们分别求方程(1.1)(1.2)的有界且满足如下条件

$$u'(\xi)\to 0,\quad u'''(\xi)\to 0\quad (|\xi|\to\infty) \tag{1.5}$$

的行波解 $u(x,y,t)=u(\xi)=u(ax+by-vt)$（其中 a、b 不全为零），则方程(1.1)(1.2)的行波解分别满足方程

$$a^4u''(\xi)+(3k^2b^2-av)u(\xi)+3a^2u^2(\xi)=c_2, \tag{1.6}$$

$$a^4u''(\xi)+(a^2-v^2)u(\xi)+6a^2u^2(\xi)=c_2. \tag{1.7}$$

（注：由于(1.5)第一积分常数 c_1 为零，c_2 为第二积分常数）．又注意到，若我们寻求方程(1.3)形如

* 1990年8月31日收到．霍英东基金会资助课题．

$$u(x,y,t) = e^{i\eta}\varphi(\xi) \quad (\text{其中 } \eta = px + qy - rt, \xi = ax + by - vt) \tag{1.8}$$

的解，其中 a,b,v 及 r 是任意参数，p,q 将由这些参数确定，则 $\varphi(\xi)$ 满足方程

$$(a^2 - b^2)\varphi''(\xi) + i(2ap - 2bq - v)\varphi'(\xi) - (p^2 - q^2 - r)\varphi(\xi) + \beta\varphi^3(\xi) = 0.$$

若取

$$\begin{cases} p = \dfrac{v}{2a} + b^2 v \\ q = abv \end{cases}, \tag{1.9}$$

则 $\varphi(\xi)$ 进一步满足

$$(a^2 - b^2)\varphi''(\xi) - (p^2 - q^2 - r)\varphi(\xi) + \beta\varphi^3(\xi) = 0. \tag{1.10}$$

类似地，若我们寻求方程(1.4)形如(1.8)的解，则 $\varphi(\xi)$ 满足方程

$$(v^2 - a^2 - b^2)\varphi''(\xi) + 2i(rv - ap - bq)\varphi'(\xi) + (p^2 + q^2 + \mu^2 - r^2)\varphi(\xi) + \beta\varphi^3(\xi) = 0.$$

若取

$$rv = ap + bq \tag{1.11}$$

则 $\varphi(\xi)$ 进一步满足

$$(v^2 - a^2 - b^2)\varphi''(\xi) + (p^2 + q^2 + \mu^2 - r^2)\varphi(\xi) + \beta\varphi^3(\xi) = 0. \tag{1.12}$$

因此，我们的讨论将从如下两类方程

$$lu''(\xi) + mu(\xi) + nu^2(\xi) = c_2 \tag{1.13}$$

$$l\varphi''(\xi) + m\varphi(\xi) + n\varphi^3(\xi) = c_2 \tag{1.14}$$

开始，所得结果基于我们对于方程(1.13)(1.14)具有指数函数的有理分式形的解的分析.

§2 K—P 方程和 Boussinesq 方程的孤波解族

我们首先求方程

$$lu''(\xi) + mu(\xi) + nu^2(\xi) = c_2 \tag{2.1}$$

的解. 设(2.1)有解形如

$$u(\xi) = \frac{Ae^{\alpha(\xi+\xi_0)}}{(1 + e^{\alpha(\xi+\xi_0)})^2} + B, \tag{2.2}$$

其中 A、B、α 待定，ξ_0 为任意实数. 易知

$$u'(\xi) = \frac{A\alpha e^{\alpha(\xi+\xi_0)} - A\alpha e^{2\alpha(\xi+\xi_0)}}{(1 + e^{\alpha(\xi+\xi_0)})^3}, \tag{2.3}$$

$$u''(\xi) = \frac{A\alpha^2 e^{\alpha(\xi+\xi_0)} - 4A\alpha^2 e^{2\alpha(\xi+\xi_0)} + A\alpha^2 e^{3\alpha(\xi+\xi_0)}}{(1 + e^{\alpha(\xi+\xi_0)})^4}, \tag{2.4}$$

$$u'''(\xi) = \frac{A\alpha^3 e^{\alpha(\xi+\xi_0)} - 11A\alpha^3 e^{2\alpha(\xi+\xi_0)} + 11A\alpha^3 e^{3\alpha(\xi+\xi_0)} - A\alpha^3 e^{4\alpha(\xi+\xi_0)}}{(1 + e^{\alpha(\xi+\xi_0)})^5} \tag{2.5}$$

显然，当 $|\xi| \to \infty$ 时，$u'(\xi), u''(\xi), u'''(\xi) \to 0$，故(2.2)满足条件(1.5)且有界. 现把(2.2)(2.3)(2.4)代入(2.1)，经整理可得关于 A、B、α 的方程组：

$$\begin{cases} nB^2 + mB - c_2 = 0 \\ a^2 l + 2nB + m = 0 \\ nA - 4a^2 l + 2(2nB + m) = 0 \end{cases} \tag{2.6}$$

解之，得

$$B_1 = \frac{-m + \sqrt{m^2 + 4nc_2}}{2n}, \quad B_2 = \frac{-m - \sqrt{m^2 + 4nc_2}}{2n}, \tag{2.7}$$

$$a^2 = \frac{\sqrt{m^2 + 4nc_2}}{|l|}, \quad (l < 0,\text{对应 } B_1;\ l > 0,\text{对应 } B_2)$$

$$a_{1,2} = \pm \frac{\sqrt[4]{m^2 + 4nc_2}}{\sqrt{|l|}}, \tag{2.8}$$

$$A = \frac{6l\sqrt{m^2 + 4nc_2}}{n|l|}. \tag{2.9}$$

将(2.7)(2.8)(2.9)代入(2.2)即知方程(2.1)有解

$$u(\xi) = \frac{6l\sqrt{m^2 + 4nc_2}}{n|l|} - \frac{\exp(\frac{\sqrt[4]{m^2 + 4nc_2}}{\sqrt{|L|}}(\xi + \xi_0))}{(1 + \exp(\frac{\sqrt[4]{m^2 + 4nc_2}}{\sqrt{|l|}}(\xi + \xi_0)))^2} + \frac{-m \pm \sqrt{m^2 + 4nc_2}}{2n}, \tag{2.10}$$

$$u(\xi) = \frac{6l\sqrt{m^2 + 4nc_2}}{n|l|} - \frac{\exp(-\frac{\sqrt[4]{m^2 + 4nc_2}}{\sqrt{|L|}}(\xi + \xi_0))}{(1 + \exp - \frac{\sqrt[4]{m^2 + 4nc_2}}{\sqrt{|l|}}(\xi + \xi_0))^2} + \frac{-m \pm \sqrt{m^2 + 4nc_2}}{2n}. \tag{2.11}$$

注意到双曲正割函数的定义，有 $\operatorname{sech}(-x)=\operatorname{sech}x$，$\operatorname{sech}^2 x=\frac{4e^{2x}}{(1+e^{2x})^2}$，(2.2)式可表成：

$$u(\xi) = \frac{Ae^{a(\xi+\xi_0)}}{(1 + e^{a(\xi+\xi_0)})^2} + B = \frac{A}{4}\operatorname{sech}^2 \frac{1}{2}a(\xi + \xi_0)] + B. \tag{2.12}$$

所以(2.10)、(2.11)一致，可统一的表成

$$u(\xi) = \frac{6l\sqrt{m^2 + 4nc_2}}{4n|l|}\operatorname{sech}^2\left[\frac{\sqrt[4]{m^2 + 4nc_2}}{2\sqrt{|l|}}(\xi + \xi_0)\right] + \frac{-m \pm \sqrt{m^2 + 4nc_2}}{2n}. \tag{2.13}$$

且当 $l>0$ 末尾根号前取"－"号，当 $l<0$，末尾根号前取"＋"号.

综上我们得到如下引理

引理 1 若 $m^2+4nc_2>0$，则方程(2.1)有解如(2.13)所示.

考虑到 K－P 方程(1.1)符合条件(1.5)的有界行波解满足(1.6). 利用引理 1，在(2.13)中令 $l=a^4$，$m=3k^2b^2-av$，$n=3a^2$，就得

定理 1 对任意的行波速度 $v\neq0$，若第二积分常数 c_2 满足 $(3k^2b^2-av)^2+12a^2c_2>0$，则 K－P 方程(1.1)有孤波解

$$u(\xi) = \frac{\sqrt{(3k^2b^2 - av)^2 + 12a^2c_2}}{2a^2}\mathrm{sech}^2\left[\frac{\sqrt[4]{(3k^2b^2 - av)^2 + 12a^2c_2}}{2a^2}(ax + by - vt + \xi_0)\right]$$

$$- \frac{(3k^2b^2 - av) + \sqrt{(3k^2b^2 - av)^2 + 12a^2c_2}}{6a^2}. \tag{2.14}$$

再注意到 Boussinesq 方程(1.2)符合条件(1.5)的有界行波解满足(1.7),利用引理 1,在(2.13)中令 $l=a^4$,$m=(a^2-v^2)$,$n=6a^2$,就得

定理 2 对任意的行波速度 $v\neq 0$,若第二积分常数 c_2 满足 $(a^2-v^2)^2+24a^2c_2>0$,则 Boussinesq 方程(1.2)有孤波解

$$u(\xi) = \frac{\sqrt{(a^2 - v^2)^2 + 24a^2c_2}}{4a^3}\mathrm{sech}^2\left[\frac{\sqrt[4]{(a^2 - v^2)^2 + 24a^2c_2}}{2a^2}(ax + by - vt + \xi_0)\right]$$

$$- \frac{(a^2 - v^2) + \sqrt{(a^2 - v^2)^2 + 24a^2c_2}}{12a^2}. \tag{2.15}$$

值得指出,在文献[4]中曾求出 K—P 方程,Boussinesq 方程当 $|\xi|\to\infty$ 时,$u(\xi)$,$u'(\xi)$,$u''(\xi)$ $u'''(\xi)\to 0$ 时的孤波解,这相当于方程(1.6)(1.7)中的第二积分常数 $c_2=0$ 的情形. 而这里我们求出的是当第二积分常数 c_2 满足一定条件的孤波解族. 如果运用[4]中方法要求出 K—P 方程的解(2.14)、Boussinesq 方程的解(2.15)是困难的,因为那将遇到椭园积分.

§ 广义 Schrödinger 方程和 Klein—Gordon 方程的解

首先求方程

$$l\varphi''(\xi) + m\varphi(\xi) + n\varphi^3(\xi) = 0 \tag{3.1}$$

的解. 设(3.1)有解形如

$$\varphi(\xi) = \frac{Ae^{\alpha(\xi+\xi_0)}}{1 + e^{\alpha(\xi+\xi_0)}} + B, \tag{3.2}$$

其中 A,B,α 待定,ξ_0 为任意实数. 易知

$$\varphi'(\xi) = \frac{A\alpha e^{\alpha(\xi+\xi_0)}}{(1 + e^{\alpha(\xi+\xi_0)})^2}, \tag{3.3}$$

$$\varphi''(\xi) = \frac{A\alpha^2e^{\alpha(\xi+\xi_0)} - A\alpha^2e^{2\alpha(\xi+\xi_0)}}{(1 + e^{\alpha(\xi+\xi_0)})^3}. \tag{3.4}$$

把(3.2)(3.3)(3.4)代入(3.1)可得 A、B、α 所满足的方程组:

$$\begin{cases} nB^3 + mB = 0 \\ nA^2 + 3nBA + 3nB^2 + m = 0 \\ 3nBA - \alpha^2 l + 2(3nB^2 + m) = 0 \\ \alpha^2 l + 3nB^2 + m = 0. \end{cases} \tag{3.5}$$

解之

$$\begin{cases} a = \pm \sqrt{\dfrac{2m}{l}}, \\ A = \pm 2\sqrt{-\dfrac{m}{n}}, \\ B = \pm \sqrt{-\dfrac{m}{n}}, \end{cases} \tag{3.6}$$

且当 A 的根号前取"+"号时，B 取"−"号，当 A 的根号前取"−"号时，B 取"+"号.

把(3.6)代入(3.2)就知当 $m\cdot l>0, m\cdot n<0$，方程(3.1)有解

$$\varphi_1(\xi) = \frac{2\sqrt{-\dfrac{m}{n}}e^{\sqrt{\frac{2m}{l}}(\xi+\xi_0)}}{1+e^{\sqrt{\frac{2m}{l}}(\xi+\xi_0)}} - \sqrt{-\frac{m}{n}}, \tag{3.7}$$

$$\varphi_2(\xi) = -\varphi_1(\xi),$$

$$\varphi_3(\xi) = \frac{-2\sqrt{-\dfrac{m}{n}}e^{-\sqrt{\frac{2m}{l}}(\xi+\xi_0)}}{1+e^{-\sqrt{\frac{2m}{l}}(\xi+\xi_0)}} + \sqrt{-\frac{m}{n}}, \tag{3.8}$$

$$\varphi_4(\xi) = -\varphi_3(\xi).$$

注意到双曲正切 $\mathrm{th}x$ 的定义及 $\mathrm{th}(-x)=-\mathrm{th}x$，(3.7)及(3.8)一致，有

$$\varphi_1(\xi) = -\varphi_3(\xi) = \sqrt{-\frac{m}{n}}\mathrm{th}\left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2m}{l}}(\xi+\xi_0)\right].$$

综上得

引理 2 若 $m\cdot l>0, m\cdot n<0$，方程(3.1)有解

$$\varphi(\xi) = \pm\sqrt{-\frac{m}{n}}\mathrm{th}\left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2m}{l}}(\xi+\xi_0)\right]. \tag{3.9}$$

考虑到广义 Schrödinger 方程(1.3)形如(1.8)的解，当取 p、q 满足(1.9)时 $\varphi(\xi)$ 满足(1.10)，应用引理 2，在(3.9)式中令 $l=a^2-b^2, m=-(p^2-q^2-r), n=\beta$，就得

定理 3 若 $(a^2-b^2)(p^2-q^2-r)<0, (p^2-q^2-r)\beta>0$，则方程(1.10)有解

$$\varphi(\xi) = \pm\sqrt{\frac{p^2-q^2-r}{\beta}}\mathrm{th}\left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{-2(p^2-q^2-r)}{a^2-b^2}}(\xi+\xi_0)\right]. \tag{3.10}$$

进而广义 Schrödinger 方程(1.13)有形如(1.8)的解析解

$$u(x,y,t) = \pm\sqrt{\frac{p^2-q^2-r}{\beta}}e^{i(px+qy-rt)}\mathrm{th}\left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{-2(p^2-q^2-r)}{a^2-b^2}}(ax+by-vt+\xi_0)\right]. \tag{3.11}$$

其中 $p=\dfrac{v}{2a}+b^2v, q=abv$.

再注意到 Klein−Gordon 方程(1.4)形如(1.8)的解当取其中的参数 r、v 满足 $r\cdot v=ap+$

bq 时，$\varphi(\xi)$满足(1.12). 应用引理 2，在(3.9)中令 $l=v^2-a^2-b^2, m=p^2+q^2+\mu^2-r^2, n=\beta$，得

定理 1 若$(p^2+q^2+\mu^2-r^2)(v^2-a^2-b^2)>0, (p^2+q^2+\mu^2-r^2)\beta<0$，则方程(1.12)有解

$$\varphi(\xi)=\pm\sqrt{\frac{-(p^2+q^2+\mu^2-r^2)}{\beta}}\,\mathrm{th}\left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2(p^2+q^2+\mu^2-r^2)}{v^2-a^2-b^2}}(\xi+\xi_0)\right]. \quad (3.12)$$

进而 Klein—Gordon 方程(1.4)有形如(1.8)的解析解

$$u(x,y,t)=\pm\sqrt{\frac{-(p^2-q^2+\mu^2-r^2)}{\beta}}e^{i(px+qy-rt)} \cdot \mathrm{th}\left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{-2(p^2+q^2+\mu^2-r^2)}{v^2-a^2-b^2}}(ax+by-vt+\xi_0)\right]. \quad (3.13)$$

其中 $rv=ap+bq$.

文献[4]曾求得广义 Schrödinger 方程和 Klein—Gordon 方程形如 $u(x,y,t)=e^{i\eta}\varphi(\xi)$的准确解. 那里 $\varphi(\xi)$部分是钟状孤波，而这里 $\varphi(\xi)$部分是扭状孤波.

作者向华中理工大学陈庆益教授，兰州大学王明亮副教授的热情帮助和关心表示衷心的感谢.

参 考 文 献

[1] M. J. Ablowitz, Studies in Applied Mathematics, 58. 1 (1978) 17—94.

[2] G. B. Whitham, Linear and Nonlinear waves, Chapter 14, 出版社 (1974).

[3] J. W. Miles, J. Fluid Mech, 106(1981), 131—147.

[4] 王明亮，几个非线性演化方程的准确解，数学杂志，第三卷第四期 (1983).

Analytic Solution of Seccral Nonlinear Evolution Equations

Zhang Weiguo

(Changsha Railway Institute, China)

Abstract

In this paper, we obtain a family of solitary solutions for the K-P equation

$$u_{xt}+6(uu_x)_x+u_{xxxx}+3k^2u_{yy}=0,$$

and the Boussinesq equation

$$u_{tt}-u_{xx}-6(u^2)_{xx}-u_{xxxx}=0.$$

Moreover, we obtain a class of analytic solutions for the Schrodinger equation

$$iu_t+u_{xx}-u_{yy}+\beta|u|^2u=0,$$

and the Klein-Gordon equation

$$u_{tt}-(u_{xx}+u_{yy})+\mu^2u+\beta|u|^2u=0.$$