第12卷第3期　　数 学 研 究 与 评 论　　Vol. 12 No. 3
1992年8月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Aug. 1992

正交表与矩阵*

张　应　山
(河南师范大学数学系，新乡 453002)

1　正交表与其所对应的矩阵

一个正交表 $L=L_n(p_1\cdots p_m)$ 是由自然数组成的 $n\times m$ 矩阵，其各列各数出现的次数相同 $r_j=n/p_j$. 每两列各数组出现的次数相同 $r_{ij}=n/p_i\cdot p_j$. 为第 j 列不同数的个数，不妨记其数码为 $1,2,\cdots,p_j$. 令 $(p_j)=(1\cdots p_j)^\tau$，1_{r_j} 为元素都是一的向量，可写 $L=(S_1(1_{r_1}\otimes(p_1))\cdots S_m(1_{r_m}\otimes(p_m))$，$\otimes$ 为 Kronecker 积，S_j 为置换矩阵.

设 Y 为一个样本数据向量，第 j 个因素的偏差平方和定义为

$$SS_j=\sum_{i=1}^{p_j}\frac{(i\text{水平和})^2}{r_i}-\frac{(\text{总和})^2}{n}.$$

由于它是 Y 的二次型，因而存在唯一的一个对称矩阵 A_j 使 $SS_j=Y^\tau A_jY$. 称 A_j 为因素 j 即 L 的第 j 列所对应的矩阵. $A=A_1+\cdots+A_m$ 称为 L 所对应的矩阵. 我们经计算发现[2]

$$A_j=S_j\cdot p_{r_j}\otimes\tau_{p_j}\cdot S_j^\tau,P_{r_j}=\frac{1}{r_j}J_{r_j},\tau_{p_j}=I_{p_j}-P_{p_j},J\text{ 为元素都是 1 的方阵}. I_p\text{ 为单位阵}.$$

本文要证明：

定理 1.1　型如 $(S_1\cdot(1_{r_1}\otimes(p_1))\cdots S_m(1_{r_m}\otimes(p_m))$ 的矩阵为正交表当且仅当 $A_iA_j=0$ $i\neq j$.

2　多边矩阵与定理的证明

设 H,K 为由自然数组成的矩阵，加上行的序指标可写成一个行向量集，定义集合 $HK^\tau=\{\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix};\alpha\in H,\beta\in K^\tau\}$，称为 HK^τ 型框架. 数阵 $A=[A^\alpha_\beta;\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}\in HK^\tau]$ 简记成 $[A^\alpha_\beta]$ 称为多边矩阵. 视 α 为行，β 为列即得到与矩阵同构的运算[1],[2],[3].

当 L 为正交表时，L 所对应矩阵同构于以 LL^τ 为框架的多边矩阵. 对因子 j，记

$$L_{\alpha(j)}=\{\beta;\ \beta(j)=\alpha(j),\ \beta\in L\},$$

$$e_{\alpha(*\cdots*j*\cdots*)}=\sum_{\beta\in L_{\alpha(j)}}e_\beta,$$

* 1990年6月18日收到.

$$e_\beta=[\delta_{\alpha\beta},\alpha\in L],\delta_{\alpha\beta}\text{ 为 Kronecker 记号},$$

$$I^j=\sum_{1\leqslant\alpha(j)\leqslant r_j} r_{\alpha(j)}^{-1} e_{\alpha(*\cdots*j*\cdots*)} e^\tau_{\alpha(*\cdots j\cdots*)},$$

则 A_j 所对应的多边矩阵为

$$\tau^j=I^j-P\quad P=\frac{1}{n}e_{(*\cdots*)}e^\tau_{(*\cdots*)},$$

其中 $r_{\alpha(j)}$ 为第 j 列第 $s=\alpha(j)$ 水平出现的频数. 因而 L 取成一般的框架的形式也对. 记 $r_{\alpha(i\ j)}$ 为 L 中 $i\ j$ 两列中 $\alpha(i\ j)=(s\ t)$ 数组出现的次数. 我们有

引理 2.1 $\tau^i\cdot\tau^j=0\Leftrightarrow I^i\cdot I^j=P\Leftrightarrow r_{\alpha(i)\beta(j)}/r_{\alpha(i)}r_{\beta(j)}=1/n,\forall\ \alpha、\beta\in L.$

证明 只证第二个充要条件即可. 注意事实[2] $e^\tau_{\alpha(*\cdots*i*\cdots*)}e_{\beta(*\cdots*j*\cdots*)}=r_{\alpha(i)\ \beta(j)}$ 及

$$I^i\cdot I^j=\sum_{1\leqslant\alpha(i)\leqslant r_i}\sum_{1\leqslant\beta(j)\leqslant r_j} r_{\alpha(i)}r_{\beta(j)}/r_{\alpha(i)}r-_{\beta(j)}\cdot e_{\alpha(*\cdots i\cdots*)}e^\tau_{\beta(*\cdots j\cdots*)},\ i\neq j.$$

若 $r_{\alpha(i)\beta(j)}/r_{\alpha(i)}r_{\beta(j)}=1/n$ 知 $I^iI^j=P$, 反过来用 $e^\tau_{\alpha(*\cdots i\cdots*)},e_{\beta(*\cdots j\cdots*)}$ 乘两边, 由 $P=\sum_{1\leqslant\alpha(i)\leqslant r_i}\sum_{1\leqslant\beta(j)\leqslant r_j}\frac{1}{n}e_{\alpha(*\cdots*i*\cdots*)}e^\tau_{\beta(*\cdots j\cdots*)}$ 知 $r_{\alpha(i)\beta(j)}/r_{\alpha(i)}r_{\beta(j)}=1/n,\forall\ \alpha,\beta\in L.$

条件 $r_{\alpha(i)\beta(j)}/r_{\alpha(i)}r_{\beta(j)}=1/n$ 为平衡设计的平衡条件. 我们有

引理 2.2 L 为正交表, 当且仅当 $r_{\alpha(i)\beta(j)}/r_{\alpha(i)}r_{\beta(j)}=1/n,\forall\ \alpha,\beta\in L.$

用引理 2.1, 2.1 即得定理 1.1, 当然要用到多边矩阵与矩阵的同构性[3].

3 几个推论

定理 3.1 设正交表 L,H 对应的矩阵为 A,B, 则 $(L\ H)$ 为正交表当且仅当 $A\cdot B=0$, 并且 $(L\ H)$ 对应的矩阵为 $A+B$.

此是我们构作正交表的基础. 注意 A,B 是投影矩阵, 一般选取 $A\geqslant A_1,B\geqslant B_1$ 使 $A_1\cdot B_1=0$, A_1,B_1 为 L,H 对应的矩阵, 即得正交表 $(L\ H)$[4 5].

定理 3.2 令 $S_j=\mathrm{diag}(\sigma_{1j}\cdots\sigma_{rj})$, σ_{ij} 是置换矩阵, $S_j\neq I$, 则 $L=((r)\otimes 1_r(1_r\otimes(p)\ S_1(1_r\otimes(p))\cdots S_m(1_r\otimes(p)))$ 是正交表当且仅当

$$\begin{cases}\sum_{s=1}^{r}\sigma_{si}^{-1}\sigma_{sj}=\lambda J,\ \lambda=r/p,\ \forall\ i\neq j\\ \sum_{s=1}^{r}\sigma_{si}=\lambda J.\end{cases}$$

由于 $\lambda=1$ 时, 上述提供了一个拉丁方的充要条件. 而可用 (0 1)-矩阵理论或群论构作拉丁方或正交表[4].

定理 3.3 令 $S_j=\mathrm{diag}(N^{a_{1j}}\cdots N^{a_{rj}})$, $N=\begin{bmatrix}0&1&&\\&\ddots&\ddots&\\&&\ddots&1\\1&&&0\end{bmatrix}$ 则 $L_n(p^m)=(S_1(1_r\otimes(p))\cdots S_m(1_r\otimes(p)))$ 是正交表当且仅当

$$I_r = \sum_{j=1}^{m} Q_j P_r Q_j^* + \Delta$$

此处 $rk\Delta = r - m$, $Q_j = \text{diag}(w^{a_{1j}} \cdots w^{a_{rj}})$, $w \neq 1$ 为任意 p 阶单位根.

此定理提供了差集与矩阵及 Hadamard 矩阵的关系,是我们用矩阵研究差集及 Hadamard 矩阵或正交表的基础[5]. 例如当 r 为素数幂, $D(r+1, r+1; p)$ 差集存在,我们构作了 $D(r^s(r+1), r^s(r+1); p)$.

定理 3.4 $L = (S_1(p_1) \otimes 1_{r_1} \cdots S_m((p_m) \otimes 1_m)$ 是正交表当且仅当

$$\tau_n = \sum_{j=1}^{m} S_j (P_{r_j} \otimes \tau_{p_j}) S_j^\tau + \Delta.$$

此处 $rk\Delta = n - \sum_{j=1}^{m} p_i + m - 1$, 此条件相当于令 $E_s^i = e_s \otimes I_{p_i}$, $E_t^j = e_t \otimes I_{p_j}$, 则

$$\sum_{s,t=1}^{n} E_s^{i\tau} S_i^\tau S_j E_t^j = \lambda J_{p_i \times p_j}, \ \forall\ i \neq j,$$

$J_{p_i \times p_j}$ 为 $p_i \times p_j$ 元素全为 1 的矩阵.

此定理为我们构作混合型正交表提供了方法基础. 如 100 行的所有混型正交表为文[4]中所列出的,那里 $L_{100}(10 \cdot 5^{10})$ 应为 $L_{100}(20 \cdot 5^{20})$, 另外还有 $L_{100}(10^3 \cdot 5 \cdot 2^5)$ 及 $L_{100}(10^3 \cdot 2^{16})$.

参 考 文 献

[1] 张尧庭、张应山, 多边矩阵, 中美统计会议论文集 (1987), 606—609.

[2] Zhang yingshan, *Application of Tensors in ANOVA*, International Math. Biology Symposium (1988), 270.

[3] 张应山, 多边矩阵微分, 河南师大学报 (自然科学版), 3(1989): 18—23.

[4] 张应山, 100 次实验的混合型正交表, 科学通报, 23(1989): 1835—1836.

[5] 张应山, 36 次实验的正交表, 河南师大学报 (自然科学版), 4(1990), 1—4.

[6] 张应山, 正交表 $L_{100}(20 \cdot 5^{20})$, 河南师大学报(自然科学版), 4(1990), 93.

Orthogonal Arrays and Matrices

Zhang Yingshan

(Henan Normal University, Xinxiang, China)

Abstract

The purpose of this note is to point out connections between orthogonal arrays and matrices by using multi-matrix theoty.