第12卷第3期　　数 学 研 究 与 评 论　　Vol. 12 No. 3
1992年5月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Aug. 1992

关于贝尔* 1、达布函数线性运算的不封闭性*

王 祖 樾
(杭州电子工业学院,310037)

摘 要

R. J. O'Malley 曾做了不少工作[1][2],但是在"贝尔* 1、达布函数的插值"一文[1]所得到的结果却是不真的.文[1]定理2指出:"设 f,g 是贝尔* 1、达布函数,如果对于任意的 $x_0,\varepsilon>0$,$\delta>0$,集

$$\{x\,|\,|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon,|g(x)-g(x_0)|<\varepsilon\}\cap U(f.g)\cap(x_0,x_0+\delta)\neq\varnothing,$$

且对 x_0 的左半邻域相应陈述同样成立,其中 $U(f,g)=U(f)\cap U(g)$,而 $U(f)$ 表示 f 的连续点集的内部,那么算术均值 $(f+g)/2$ 仍是贝尔* 1、达布函数."

本文构造反例指出该命题是不成立的,从而说明贝尔* 1、达布函数类即使满足[1]的条件,它对线性运算也是不封闭的.顺便,再指出文[3]的一个错误.

贝尔* 1函数是贝尔1函数,且具有更强的连续性要求:假如对每一个闭集 F,存在开区间 (a,b) 使 $(a,b)\cap F\neq\varnothing$ 且使 f 在 F 上的限制 $f|_F$ 在 (a,b) 内连续,则称 f 为贝尔* 1函数.所谓达布函数是指把连通集映射为连通集的函数.贝尔* 1、达布函数是指既是贝尔* 1函数又是达布函数.

已有结果是贝尔* 1函数 f 的连续点之内部即连续点所成之集的内点全体,是一个稠开集,记作 $U(f)$.设 f,g 均为贝尔* 1函数,则记 $U(f,g)=U(f)\cap U(g)$.

文[1]定理2指出:设 f 和 g 是贝尔* 1、达布函数,若对于定义域中任意点 x_0 和任意 $\varepsilon>0,\delta>0$ 集合

$$K=\{x\,|\,|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon,|g(x)-g(x_0)|<\varepsilon\}\cap U(f,g)\cap(x_0,x_0+\delta)\neq\varnothing,$$

且对 x_0 的左半邻域 $(x_0-\delta,x_0)$ 上述类似陈述也成立,那么算术均值 $(f+g)/2$ 仍是贝尔* 1、达布函数.

本文将构造反例,指出该命题不真.

不失一般,我们只考虑定义在 $[0,1]$ 上的实函数.区间 $[0,1]$ 上的康托完备集记作 C,其余集记为 $G=[0,1]\backslash C=\bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i,b_i)$,$(a_i,b_i)$ 称为余区间,是被移走的三分区间中间的一个:$(a_1,b_1)=(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$,$(a_2,b_2)=(\frac{1}{9},\frac{2}{9})$,$(a_3,b_3)=\frac{7}{9},\frac{8}{9},\cdots$

* 1990年7月3日收到.

对余区间(a_i,b_i)，我们作函数$\varphi_i(x)$如下：在左端点a_i的右近旁取表达式$\frac{1}{2}(1+\sin\frac{1}{x-a_i})$，在右端点$b_i$的左近旁取表达式$\frac{1}{2}(1+\sin\frac{1}{b_i-x})$，而区间$(a_i,b_i)$的中间则用直线段连接并保证$\varphi_i$连续于$(a_i,b_i)$ $(i=1,2,\cdots)$.

现定义函数f,g如下：

$$f(x)=\begin{cases}\varphi_i(x),\ x\in(a_i,b_i),\ i=1,2,\cdots,\\ x^2,\ x\in C;\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}-\varphi_i(x),\ x\in(a_i,b_i),\ i=1,2,\cdots,\\ -x,\ x\in C.\end{cases}$$

于是其均值

$$h(x)=\frac{f(x)+g(x)}{2}=\begin{cases}0,\ x\in(a_i,b_i),\ i=1,2,\cdots\\ \frac{x^2-x}{2},\ x\in C.\end{cases}$$

由于康托完备集C是疏朗集，容易验证$h(x)$的值域也是一个疏朗集，从而不是连通集， 因此$h(x)$已失去了达布性，即为非达布函数.

现在我们验证以下事实：

(1) f是贝尔* 1函数.

设F是$[0,1]$中的闭集. 若F含有孤立点，那么取$\delta>0$充分小，使$(x_0-\delta,x_0+\delta)\cap(F\setminus\{x_0\})=\varnothing$，于是$f|_F$在$(x_0-\delta,x_0+\delta)$内总是连续的(函数在孤立点处总是连续的). 因此我们可以假设F为完备集.

若 $F\cap G\neq\varnothing$，则有(a_k,b_k)使$(a_k,b_k)\cap F\neq\varnothing$，于是显然有$f|_F$在$(a_k,b_k)$内连续. 若$F\cap G=\varnothing$，则$F\subset C$. 但在$C$上我们定义$f$取值为$x^2$，故$f|_C$在$C$上连续，于是$f|_F$在任何含$F$的区间$(a,b)$内连续. 因此$f$是贝尔* 1函数.

(2) f是达布函数.

不妨取连通集为闭区间. 对任意$[0,1]$中的闭区间$[a,b]$，若$[a,b]$落在某(a_k,b_k)之中， 则$f([a,b])$为连续函数的象故为连通集. 若$[a,b]$与C相交，则$[a,b]$上总含有余区间的端点(因G是稠开集)，于是$f([a,b])=[0,1]$，仍为连通集. 因此f是达布函数. 对函数g，(1)(2)同样成立.

(3) 满足文[1]定理2条件.

设$\varepsilon>0,\delta>0$任给. 由所作知，$U(f,g)=G=\bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i,b_i)$，它是稠开集. 当$x_0\in G$，则有$k$使$x_0\in(a_k,b_k)$，$f,g$在$x_0$处连续，故$K\neq\varnothing$. 当$x_0\in C$，利用稠开集性质，在$x_0$的任意邻域内，总含有余区间，故$f(x)$在0与1之间振荡，$f(x_0)=x_0^2\in[0,1]$，而$g(x)$则在0与$-1$间振荡，$g(x_0)=-x_0\in[-1,0]$. 因此总有$K\neq\varnothing$. 对左半邻域也同样成立.

再由(1)(2)知，我们所构造的函数f,g满足命题的要求，但其算术均值却不是达布函数，从而就不是贝尔* 1、达布函数了.

由此反例看到，达布函数类，贝尔1、达布函数类，甚至贝尔*、达布函数类，对线性运算也是不封闭的，这是有些出乎感觉的. 这样，在达布函数类中找出一类函数对线性运算封闭就变

得十分有意义和有趣的了，因为这样就有线性运算结构而构成线性赋范空间，甚至形成一个新的 Banach 空间. 于是，泛函分析的研究工作就可以在此空间里展开.

最后再顺便指出，文[3]把有界的贝尔 1、达布函数全体赋上确界的距离称之为 bDB_1 空间，文[3]称其为 Banach 空间(文[3]定理 2). 由上知道，这是错误的. 我们所作的反例中的 f，g，属于 bDB_1 空间. 但 $(f+g)/2$ 都不属于 bDB_1 空间. 因此，bDB_1 不是 Banach 空间，只是完备距离空间，它没有向量运算的线性结构. 文[4]也没用文[3]误冠以 Banach 空间. 但是，十分欣慰的是，文[3][4]的所有结论仍然成立，因为论证无需运用线性运算，只要更改名称为完备距离空间即可.

参考文献

[1] R. J. O'Malley, *Insertion of Bair* 1, Darboux functions*, Rev. Roum. Math. Pures et appl., Bucarst, Tome XXIV, No. 10 (1979), 1445—1448.

[2] R. J. O'Malley, *Baire* 1, Daboux functions*, Proc. Amer. Math. Soc., 60(1976), 187—192.

[3] J. Ceder, T. L. Pearson, *On typical bounded Darboux Bair one functions*, Acta Math. Academiae Scientiarum Hungaricae, Tomus 37(4) (1981), 339—348.

[4] 王祖樾，关于 bDB_1 函数空间的剩余集，杭州电子工业学院学报 Vol. 9. No. 1 (1989), 34—36.

On the Uncloseness of Baire *1, Darboux Functions Under the Linear Operation

Wang Zuyue

(Hangzhou Institute of Electronic Engineering, China)

Abstract

In this paper, we construct Baire* 1, Darboux functions f and g, but the average of f and g is not Darboux function. Thus the Class of Baire * 1, Darboux functions is not closed under the linear operation.