第12卷第4期
1992年11月
数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol. 12 No. 4
Nov. 1992

集值1—集压缩映象的重合点与不动点*

张石生　　郭伟平
(四川大学数学系,610064)　(齐齐哈尔师院数学系,161002)

摘　要

本文在Banach空间中,证明了集值1—集压缩映象对的重合点定理与集值1—集压缩映象列的公共不动点定理.

§1　引　言

自1930年,K. Kuratowski在[1]中引入了非紧性测度及k—集压缩映象以来,许多人对这类映象的不动点与重合点的存在性问题进行了研究[2—5].获得了许多重要结果.由于1—集压缩映象是较为广泛的一类算子,因此许多人更注重研究这类映象,并把单值1—集压缩映象推广到集值情况.然而至今,关于集值1—集压缩映象的结果甚少.1989年,T. H. Chang, C. L. Yen在[6]中证明了Banach空间中的弱紧凸集上,集值1—集压缩映象存在不动点.最近,我们在[11]中把这一类结果推广到了集值1—集压缩映象对,证明了重合点定理.本文继续研究集值1—集压缩映象.在Banach空间中的有界闭凸集上证明了集值1—集压缩映象对的重合点定理,并讨论了弱紧凸集上集值1—集压缩映象与连续映象的重合点存在问题.给出了集值1—集压缩映象列存在公共不动点的充分条件,推广了[6]中的结果.

§2　定义与引理

为方便,以下总假定E是Banach空间,$X\subset E$.我们用2^X表X中一切非空子集族,$C(X)$表X中一切非空闭集族.$CB(X)$表X中一切非空有界闭集族.$CC(X)$表X中一切非空紧集族.文中所涉及到的集值映象连续,有界的概念可参见[9].

下面引入几个概念.

定义2.1　$T:X\to 2^X$称为集值k—集压缩映象,若T是连续有界映象,且存在$k\geqslant 0$,使得$\alpha(T(\Omega))\leqslant k\alpha(\Omega)$,$\forall\ \Omega\in CB(X)$此处$\alpha(\cdot)$表非紧性测度,$T(\Omega)=\bigcup\limits_{x\in\Omega}Tx$.

当$k<1$时,T也称为集值严格集压缩映象.

定义2.2　称映象$T:X\to 2^X$在x_*点具有性质(S),如果$\forall\ x\in X, x\neq x_*$,存在常数$r_x\geqslant 0$,

---

* 1990年10月12日收到.

使得 $d(x,Tx)\leqslant r_x d(x,Tx_*)$，此处 $d(A,B)$ 表集合 A,B 的距离.

定义 2.3 $S,T:X\to 2^X$ 称为半紧映象对，如果 $\{x_n\}\subset X$. 当 $\lim\limits_{n\to\infty} d(Sx_n,Tx_n)=0$ 时，则 $\{x_n\}$ 有收敛的子序列.

当 $S=I$ 时(I 表恒等映象)，称 T 为半紧映象.

定义 2.4 设 $K\subset E$ 为非空凸集，$S,T:K\to 2^K$ 称 $S-T$ 为凸映象(半凸映象)若 $\forall\ x,y\in K$，$0\leqslant\lambda\leqslant 1$，$u=\lambda x+(1-\lambda)y$ 有 $d(Su,Tu)\leqslant\lambda d(Sx,Tx)+(1-\lambda)d(Sy,Ty)$，$(d(Su,Tu)\leqslant\max\{d(Sx,Tx),d(Sy,Ty)\})$ 显然，$S-T$ 为凸映象时，必为半凸映象.

定义 2.5 设 X,Y 为两个线性空间，$T:X\to Y(X\to 2^Y)$ 称为仿射映象，若 $\forall\ x,y\in X,\lambda,\mu\geqslant 0,\lambda+\mu=1$，有 $T(\lambda x+\mu y)=\lambda Tx+\mu Ty$.

为了证明本文的主要结果，我们先证几个引理.

引理 2.1 设 $K\subset E$ 为非空有界闭凸集. 映象 $S:K\to CC(K)$ 在 $x_*\in K$ 点具有性质(S)，$T:K\to C(K)$ 是集值 1－集压缩映象，则 $\inf\limits_{x\in K} d(Sx,Tx)=0$.

证明 对于 $x_*\in K$，$0\leqslant\lambda<1$，定义集值映象 $T_\lambda:K\to C(K)$ 如下：$T_\lambda x=(1-\lambda)Sx_*+\lambda Tx$，$\forall\ x\in K$. 于是 $\forall\ \Omega\in CB(K)$，注意到 Sx_* 紧及 T 是集值 1－集压缩映象，有

$$\alpha(T_\lambda(\Omega))\leqslant\alpha((1-\lambda)Sx_*)+\alpha(\lambda T(\Omega))\leqslant(1-\lambda)\alpha(Sx_*)+\lambda\alpha(\Omega)=\lambda\alpha(\Omega)$$

故 T_λ 是集值严格集压缩映象. 因而存在不动点 x_λ. 即 $x_\lambda\in T_\lambda x_\lambda=(1-\lambda)Sx_*+\lambda Tx_\lambda$. 于是存在 $z_\lambda\in Sx_*$，$y_\lambda\in Tx_\lambda$ 使得 $x_\lambda=(1-\lambda)z_\lambda+\lambda y_\lambda$，故

$$\|x_\lambda-y_\lambda\|=(1-\lambda)\|z_\lambda-y_\lambda\|,\tag{2.1}$$

$$\|x_\lambda-z_\lambda\|=\lambda\|y_\lambda-z_\lambda\|\tag{2.2}$$

由(2.1)式 $d(x_\lambda,Tx_\lambda)=\inf\limits_{u\in Tx_\lambda}\|x_\lambda-u\|\leqslant\|x_\lambda-y_\lambda\|=(1-\lambda)\|z_\lambda-y_\lambda\|$，再由 K 有界，易证 $\{\|z_\lambda-y_\lambda\|:\lambda\in[0,1)\}$ 有界. 故

$$\inf_{x\in K}d(x,Tx)\leqslant\inf_{\lambda\in[0,1)}d(x_\lambda,Tx_\lambda)\leqslant\inf_{\lambda\in[0,1)}(1-\lambda)\|z_\lambda-y_\lambda\|=0.\tag{2.3}$$

由(2.2)式 $d(Sx_*,x_\lambda)=\inf\limits_{v\in Sx_*}\|v-x_\lambda\|\leqslant\|z_\lambda-x_\lambda\|=\lambda\|y_\lambda-z_\lambda\|$. 又 S 在 x_* 上具有性质(S). 故

$$\inf_{x\in K}d(Sx,x)\leqslant\inf_{\lambda\in[0,1)}d(Sx_\lambda,x_\lambda)\leqslant\inf_{\lambda\in[0,1)}r_{x_\lambda}d(Sx_*,x_\lambda)\leqslant\inf_{\lambda\in[0,1)}\lambda r_{x_\lambda}\|y_\lambda-z_\lambda\|=0.\tag{2.4}$$

易证

$$\inf_{x\in K}d(Sx,Tx)\leqslant\inf_{\lambda\in K}d(Sx,x)+\inf_{x\in K}d(x,Tx).\tag{2.5}$$

由(2.3)(2.4)(2.5)式可得 $\inf\limits_{x\in K}d(Sx,Tx)=0$.

应该指出，在引理 2.1 中，映象 S 在 x_* 点具有性质(S)这一条件是必要的，否则有如下反例.

例 设 $E=(-\infty,+\infty)$，$\|\cdot\|=|\cdot|$($|\cdot|$通常绝对值)$(E,|\cdot|)$为 Banach 空间，$K=[0,1]$为 E 中有界闭凸集. 定义映象 $S:K\to CC(K)$，$T:K\to C(K)$ 如下：

$$Sx=\begin{cases}\{1\} & \text{当 } x=0 \text{ 时}\\ \{0\} & \text{当 } 0<x\leqslant 1 \text{ 时}\end{cases},\quad Tx=\{\frac{1}{2}\}\quad\forall\ x\in K.$$

$\forall\ y\in K,y\neq 0$ 及 $r\geqslant 0$，有 $d(S0,0)=\|1-0\|=1>r\cdot 0=rd(Sy,0)$，又显然 T 连续，有界，$\forall\ \Omega\in CB(K)$，有 $\alpha(T(\Omega))=\alpha(\{\frac{1}{2}\})=0\leqslant\alpha(\Omega)$. 故 T 为集值 1－集压缩映象，但是

$$\inf_{x\in K} d(Sx,Tx) = \min\{d(S0,T0),\ \inf_{x\in[0,1)} d(Sx,Tx)\}$$
$$= \min\{\| 1-\frac{1}{2}\|,\ \| 0-\frac{1}{2}\|\} = \frac{1}{2} > 0.$$

注 在引理 2.1 中取 $S=I$,可得如下结果.

推论 2.1[6] 设 $K\subset E$ 为非空有界闭凸集. $T:K\to C(K)$是集值 1—集压缩映象. 则$\inf\limits_{x\in K} d(x,Tx)=0$.

引理 2.2 设(X,d)为度量空间,$A,B\subset X$ 分别是紧集与闭集. 若 $d(A,B)=0$,则 $A\cap B\neq\varnothing$.

证明 反证. 设 $A\cap B=\varnothing$. 因为 B 是闭集,故$\forall\ x\in A$,都有 $d(x,B)>0$. 设 $f(x)=d(x,B)$,$\forall\ x\in A$,易知 $f(x)$为紧集 A 上的连续函数,故存在 $x_0\in A$,使得 $0<d(x_0,B)=\inf\limits_{x\in A} d(x,B)=d(A,B)$,矛盾.

引理 2.3 设 $K\subset E$ 为非空弱紧凸子集,$f:K\to[0,+\infty)$是下半连续函数,若
$$\inf_{x\in K} f(x) = 0, \tag{2.6}$$
且对一切 $x,y\in K,\lambda\in[0,1]$, $u=\lambda x+(1-\lambda)y$ 有
$$f(u) \leqslant \Phi(\max[f(x),f(y)]), \tag{2.7}$$
其中 $\Phi:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$不减. 在 $x=0$ 点连续且 $\Phi(0)=0$,则存在 $x_0\in K$,使得 $f(x_0)=0$.

证明 取正数列$\{C_n\}$满足条件 $C_n\downarrow 0$ 且 $\Phi(C_{n+1})<C_n\ (n\geqslant 1)$. 设
$$A_n = \{x\in K: f(x)\leqslant C_n\}\quad (n\geqslant 1), \tag{2.8}$$
由(2.6)式及 $f(x)$下半连续,可知$\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$为非空闭集列. 设 $x_n\in A_n\ (n\geqslant 1)$. 记 $B_n=\{x_i: i\geqslant n+1\}$, $K_n=\mathrm{Co}(B_n)$. 对于 $n\leqslant m$,再记 $B_{n,m}=\{x_i: n+1\leqslant i\leqslant m+1\}$. $K_{n,m}=\mathrm{Co}(B_{n,m})$.

下面证对任意 $n\geqslant 1$ 及 $m\geqslant n$,有
$$K_{n,m}\subset A_n. \tag{2.9}$$
当 $n=m$ 时,显然 $K_{n,m}\subset A_n$,假设 $n=s\leqslant m$ 时(2.9)式成立. 则$\forall\ u\in K_{s-1,m}=\mathrm{Co}(B_{s-1,m})$. 存在 $\lambda\in[0,1]$及 $x_{i_1},x_{i_2}\in B_{s-1,m}$ 使得 $u=\lambda x_{i_1}+(1-\lambda)x_{i_2}$. 由假定 $K_{s,m}\subset A_s$ 易知 $B_{s-1,m}\subset A_s$,故 $x_{i_1},x_{i_2}\in A_s$. 再由(2.7),(2.8)式可得
$$f(u)\leqslant \Phi(\max[f(x_{i_1}),f(x_{i_2})])\leqslant \Phi(C_s) < C_{s-1}.$$
故 $u\in A_{s-1}$. 故证得 $K_{n,m}\subset A_n\ (m\geqslant n\geqslant 1)$. 于是 $K_n\subset A_n\quad (n\geqslant 1)$,从而$\overline{K_{n-1}}\subset\overline{K_n}\subset A_n\subset K\quad (n\geqslant 1)$. 故$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n\supset\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\overline{K_n}\neq\varnothing$. 设 $x_0\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n\subset K$. 对任意 n 有 $x_0\in A_n$,即$\forall\ n, f(x_0)\leqslant C_n$. 由 $C_n\downarrow 0$. 证得 $f(x_0)=0$.

§3 重合点与不动点

我们首先讨论两个集值 1—集压缩映象对的重合点的存在问题,我们有下面的结果.

定理 3.1 设 $K\subset E$ 为非空有界闭凸子集,$S:K\to CC(K)$,$T:K\to C(K)$是半紧的集值 1—集压缩映象对,则存在 $x_0\in K$. 使得 $Sx_0\cap Tx_0\neq\varnothing$.

证明 因为 S,T 均为集值 1—集压缩映象. 由推论 2.1 可知

$$\inf_{x\in K} d(x,Sx) = 0, \quad \inf_{x\in K} d(x,Tx) = 0.$$

于是

$$\inf_{x\in K} d(Sx,Tx) \leqslant \inf_{x\in K} d(x,Sx) + \inf_{x\in K} d(x,Tx) = 0,$$

故存在$\{x_n\}\subset K$,使得 $d(Sx_n,Tx_n)\to 0 \quad (n\to\infty)$. 再由 S,T 为半紧映象对,故存在$\{x_{n_k}\}\subset\{x_n\}$收敛于 K 中一点,不妨设 $x_{n_k}\to x_0$,再由 S,T 的连续性,易证 $d(Sx,Tx)$为 K 上的连续函数. 故 $d(Sx_{n_k},Tx_{n_k})\to d(Sx_0,Tx_0) \quad (h\to\infty)$,

再注意到 $d(Sx_{n_k},Tx_{n_k})\to 0 \quad (k\to\infty)$,可得 $d(Sx_0,Tx_0)=0$. 又 Sx_0,Tx_0 分别是 K 中紧集与闭集. 由引理 2.2 知 $Sx_0\cap Tx_0\neq\varnothing$.

注 在定理 3.1 中,特别取 $S=I$ 可得集值 1—集压缩映象的不动点定理.

推论 3.1 设 $K\subset E$ 为非空有界闭凸子集,$T:K\to C(K)$是半紧的集值 1—集压缩映象,则存在 $x_0\in K$,使 $x_0\in Tx_0$.

下面我们证明集值 1—集压缩映象与连续映象的重合点定理.

定理 3.2 设 $K\subset E$ 为非空弱紧凸子集. $S:K\to CC(K)$是在 x_* 点具有性质(S)的连续映象,$T:K\to C(K)$是集值 1—集压缩映象. 若对一切 $x,y\in K$,$\lambda\in[0,1]$. $u=\lambda x+(1-\lambda)y$,有

$$d(Su,Tu) \leqslant \Phi(\max[d(Sx,Tx),d(Sy,Ty)]), \tag{3.1}$$

其中 Φ 满足引理 2.3,则存在 $x_0\in K$,使得 $Sx_0\cap Tx_0\neq\varnothing$.

证明 由引理 2.1 可知

$$\inf_{x\in K} d(Sx,Tx) = 0 \tag{3.2}$$

由 S,T 的连续性,不难证明 $d(Sx,Tx)$为 K 上连续函数,再注意到(3.1),(3.2)式及引理 2.3 可知存在 $x_0\in K$,使得 $d(Sx_0,Tx_0)=0$. 又 Sx_0,Tx_0 分别为 K 中紧集与闭集. 故由引理 2.2,$Sx_0\cap Tx_0\neq\varnothing$.

推论 3.2 设 $K\subset E$ 为非空弱紧凸子集,$S:K\to CC(K)$是在 x_* 点具有性质(S)的连续映象,$T:K\to C(K)$是集值 1—集压缩映象,若 $S-T$ 是凸映象(或半凸映象)则存在 $x_0\in K$,使得 $Sx_0\cap Tx_0\neq\varnothing$.

注 定理 3.2 推广了[6]中的相应结果.

最后,我们给出集值 1—集压缩映象列存在公共不动点的充分条件.

定理 3.3 设 $K\subset E$ 为非空弱紧凸子集,$T_n:K\to C(K)$,$n=1,2,\cdots$是集值 1—集压缩的仿射映象列,若 $\sum_{n=1}^{\infty} d(x,T_nx)$ 在 K 上一致收敛,则存在 $x_0\in K$,使 $x_0\in\bigcap_{n=1}^{\infty}T_nx_0$.

证明 记 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} d(x,T_nx)$,$x\in K$.

首先,我们证明$\inf_{x\in K} f(x)=0$.

因为$\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$为集值 1—集压缩映象列,由推论 2.1 知

$$\inf_{x\in K} d(x,T_nx) = 0 \quad (n\geqslant 1). \tag{3.3}$$

设

$$\delta = \inf_{x\in K} f(x) > 0 \tag{3.4}$$

再记 $f_n(x)=\sum_{i=1}^{n}d(x,T_ix)$. 因为 $\sum_{i=1}^{n}d(x,T_nx)$ 在 K 上一致收敛，故对 $0<\varepsilon<\delta$ 存在正整数 N，使得对一切 $x\in K$，有

$$f(x)-f_N(x)<\varepsilon. \tag{3.5}$$

于是

$$\inf_{x\in K}(f(x)-f_N(x))<\varepsilon. \tag{3.6}$$

由(3.3)式易证

$$\inf_{x\in K}f_N(x)=0. \tag{3.7}$$

把(3.6)，(3.7)式相加可得

$$\delta=\inf_{x\in K}f(x)<\varepsilon,$$

矛盾，故

$$\inf_{x\in K}f(x)=0 \tag{3.8}$$

现在证 $f(x)$在 K 上连续.

因为$\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$为集值 1—集压缩映象列，故$\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$为连续映象列，从而$\{d(x,Tx_n)\}_{n=1}^{\infty}$为 K 上连续函数列. 再由 $\sum_{n=1}^{\infty}d(x,T_nx)$ 在 K 上一致收敛. 可知 $f(x)$在 K 上连续.

下面证对一切 $x,y\in K,\lambda\in[0,1],u=\lambda x+(1-\lambda)y$ 有

$$f(u)\leqslant 2\max\{f(x),f(y)\} \tag{3.9}$$

因为$\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$为仿射映象列，对任意 n 及一切 $x,y\in K,\lambda\in[0,1],u=\lambda x+(1-\lambda)y$. 有

$$\begin{aligned}d(u,T_nu)&=\inf_{v\in T_nu=\lambda T_nx+(1-\lambda)T_ny}\|u-v\|=\inf_{p\in T_nx,q\in T_ny}\|\lambda x+(1-\lambda)y-[\lambda p+(1-\lambda)q]\|\\&\leqslant\lambda\inf_{p\in T_nx}\|x-p\|+(1-\lambda)\inf_{q\in T_ny}\|y-q\|=\lambda d(x,T_nx)+(1-\lambda)d(y,T_ny)\\&\leqslant\max(d(x,T_nx),d(y,T_ny)),\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}d(u,T_nu)&\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\{d(x,T_nx),d(y,T_ny)\}\\&\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}d(x,T_nx)+\sum_{n=1}^{\infty}d(y,T_ny)\\&\leqslant 2\max\{\sum_{n=1}^{\infty}d(x,T_nx),\sum_{n=1}^{\infty}d(y,T_ny)\}\end{aligned}$$

即 $f(u)\leqslant 2\max\{f(x),f(y)\}$. 设 $\Phi(x)=2x,x\in[0,+\infty)$. 则(3.9)式可化为

$$f(u)\leqslant\Phi(\max[f(x),f(y)]) \tag{3.10}$$

故 $f(x)$满足引理 2.3. 因此存在 $x_0\in K$，使得 $f(x_0)=0$. 即 $\sum_{n=1}^{\infty}d(x_0,T_nx_0)=0$. 于是$\forall\ n$，有 $d(x_0,T_nx_0)=0$. 又 T_nx_0 闭，故 $x_0\in T_nx_0\ (n\geqslant 1)$. 即 $x_0\in\bigcap_{i=1}^{\infty}T_nx_0$.

参 考 文 献

[1] K. Kuratowski, *Sur let espaces complets*, Fund. Math. 15(1930), 301—309.

[2] R. D. Nussbaum, *The fixed point index and asymptotic fixed point theorems for k—set contractions*, Bull. Amer. Math. Soc. 75(1969), 490—495.

[3] G. Z. Li, *A new fixed point theorem on demi—compact 1—set—contraction mappings*, Proc. Amer. Math. Soc., 97:2(1986), 277—280.

[4] P. Massatt, *A fixed point theorem for α—condensing maps om a sphere*, Proc. Roy. Soc., Edinburgh sect, A94 (1983), 323—329.

[5] 孙经先，集压缩算子的某些不动点定理，科学通报，31：10(1986), 728—729.

[6] T. H. Chang, C. L. Yen, *Some fixed point theorems in Banach space*, J. Math. Anal. Appl, 138(1989), 550—558.

[7] H. M. Ko, *Fixed point theorems for point—to—set mappings and the set of fixed points*, Pacific J. Math. 42(1972), 369—379.

[8] 张石生，不动点理论及应用，重庆出版社 (1984).

[9] 郭大钧，非线性泛函分析，济南，山东科学技术出版社 (1985).

[10] D. Downing, W. A. Kirk, *Fixed point theorem for set—valued mapping in metric and Banach Spaces*. Math. Japcn. 22(1977), 99—116.

[11] Chang Shisheng, Guo Weiping, *An existence theorem of zero points in convex metric spaces with applications*, Proc, Amer. Math. Soc. to appear.

Coincidence Points and Fixed Points for 1-set Contraction Mappings

Zhang Shisheng

(Dept. Math., Sichuan University, Chengdu)

Guo Weiping

(Dept. Math., Qiqihaer Teacher's College)

Abstract

Some coincidence point theorems and common fixed point theorems for a pair of 1-set contraction mappings and a sequence of 1-set contraction mappings in Banach spaces are given.