第12卷第4期　　数学研究与评论　　Vol. 12 No. 4
1992年11月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Nov. 1992

Hausdorff 良紧空间是超紧的充要条件*

彭育威
(西南民族学院数学系，成都 610041)

摘要

本文给出 L—Fuzzy Hausdorff 良紧空间是超紧的充要条件. 在此基础上，讨论了使 Hausdorff 空间的四种紧性等价的条件. 另外，我们还研究了分子网的格代数特征与空间层次结构的关系.

王国俊在[1]中证明了一个重要定理，当值域格 L 的最大元是并既约元时，Hausdorff 空间的四种重要的紧性—超紧、良紧、强 F 紧和 F 紧是彼此等价的. 同时他提出一个公开问题，对一般的 L—Fuzzy 拓扑空间这一结论是否还成立. 本文将讨论这一问题. 我们首先调查了分子网的格代数特征与空间层次构造的关系. 证明了 Hausdorff 空间的良紧性，强 F 紧性和 F 紧性是彼此等价的. 从而将[1]的问题 6. 4. 31 转化为寻找 Hausdorff 良紧空间是超紧的条件. 最后我们给出了 Hausdorff 空间的四种紧性等价的充要条件.

本文中 X 总表非空集，L 表 fuzzy 格，$J(L)$ 表 L 的全体非零并既约元所成之集. (L^X,δ) 表不分明拓扑空间，δ' 表 (L^X,δ) 的闭集族. 文中其余常用概念如 Hausdorff 空间，强 Hausdorff 空间，F 紧，强 F 紧，良紧，超紧等；常用符号 $\iota_L,\omega_L,[\delta]$ 等的含义请参见[1].

下文中 $\lambda\chi_B(\lambda\in L):X\to L$ 表如下定义的映射. 当 $x\in B$ 时，$\lambda\chi_B(x)=\lambda$；当 $x\overline{\in} B$ 时，$\lambda\chi_B(x)=0$. 特别当 $\lambda=1$ 时，我们简记为 χ_B.

定义 1　设 (L^X,δ) 是 LF 空间，以 $\delta\cup\{\lambda\chi_X|\lambda\in L\}$ 为子基生成的不分明拓扑称为关于 δ 的满层化拓扑，记为 δ_f.

易知 δ_f 是细于 δ 的最粗的满层拓扑，$\{P\cap\lambda\chi_X|P\in\delta,\lambda\in L\}$ 是 δ_f 的拓扑基；δ 是满层化拓朴的充要条件是 $\delta=\delta_f$. 下面的例子说明 $[\delta]=[\delta_f]$ 一般不成立.

例　设 $L=\{0,a,b,1\}$ 是四元 fuzzy 格，其基本运算如下：$a\wedge b=0,a\vee b=1,0'=1,a'=b$. 设 $X=\{x,y\},\delta=\{0,x_a,x_b\vee y_a,x_1\vee y_a,\chi_X\}$. 易知 $x_a\vee(b\chi_X\wedge(x_b\vee y_a))=x_1\in\delta_f$，从而 $\{x\}\in[\delta_f]$，但 $\{x\}\overline{\in}[\delta]=\{\varnothing,X\}$，故 $[\delta]\neq[\delta_f]$.

下面我们将利用 a—网[2-4]来刻划满层拓朴.

定理 1　设 (L^X,δ) 是 LF 拓扑空间，则如下命题等价.

(1)　若 (L^X,δ) 的分子网 $S=\{S(n)|n\in D\}$ 有高为 $a(a\in J(L))$ 的聚点，则

$$M(S)=\wedge\{\vee\{\overline{V}(S(m))|m\geqslant n\}|m\in D\}\geqslant a,$$

---

* 1990年6月26日收到.

其中$\bar{V}(S(m))$表示$S(m)$的高(下同).

(2) δ是满层拓扑,即$\delta=\delta_f$.

(3) 若分子网有高为a为极限点,则

$$m(S)=\vee\{\wedge\{\bar{V}(S(m))|m\geqslant n\}|m\in D\}\geqslant a.$$

证明 (1)⇒(2):设a是L的任一非零元,若$x_a\leqslant(a\chi_X)^-$ $(a\in J(L))$,则存在$a\chi_X$的分子网S收敛于x_a.由(1)知$a\geqslant M(S)\geqslant a$,从而$x_a\leqslant a\chi_X$.由$a$的任意性易知$(a\chi_X)^-\leqslant a\chi_X$,即$a\chi_X$是闭集.由$a$的任意性知$(L^X,\delta)$是满层空间.

(2)⇒(3):设S收敛于x_a,而$m(S)\ngeqslant a$,由[5]知存在$m(S)$的标准极大集的成员λ使$\lambda\geqslant m(S)$且$\lambda\ngeqslant a$.由(2)知$\lambda\chi_X$是x_a的远域.另一方面,$\forall n\in D$,由λ是交既约元且

$$\lambda\geqslant m(S)\geqslant\wedge\{\bar{V}(S(m)):m\geqslant n\}$$

推得,存在$m\geqslant n$使得$\lambda\geqslant\bar{V}(S(m)$.而这与$S$应终远于$\lambda\chi_X$相矛盾,故$m(S)\geqslant a$.

(3)⇒(1):设x_a是S的聚点,则存在S的子网T收敛于x_a,由(3)知$m(T)\geqslant a$,而

$$M(S)\geqslant M(T)\geqslant m(T).$$

从而$M(S)\geqslant a$.

上述定理可以推得如下有趣的命题,它首次出现在[6]中,后又被[7]再次证明.

推论 满层Hausdorff空间的良紧子集一定是闭集.

下面的命题说明空间的层次结构同样能影响网的代数特征.

定理2 设$S=\{S(n)|n\in D\}$是(L^X,δ)的分子网,$a\in J(L)$.

(1) x_a是S关于δ的聚点且$M(S)\geqslant a$当且仅当x_a同样是S关于δ_f的聚点.

(2) x_a是S关于δ的极限点且$m(S)\geqslant a$当且仅当x_a同样是S关于δ_f的极限点.

证明 (1) 设x_a是S关于δ的聚点且$M(S)\geqslant a$,$Q\vee a\chi_X$ $(Q\in\delta',a\in L)$是x_a关于δ_f的远域基元.由$a\in J(L)$知,$x_a\nleqslant Q$或$x_a\nleqslant a\chi_X$.若$x_a\nleqslant Q$,由已知S必常远于Q.若$x_a\nleqslant a\chi_X$,即$a\nleqslant a$,进而有

$$a\ngeqslant M(S)=\wedge\{\vee\bar{V}(S(m))|m\geqslant n\}|n\in D\},$$

故$\forall n\in D$,$a\ngeqslant\vee\{\bar{V}(S(m))|m\geqslant n\}$.即$S$常远于$a\chi_X$.由于$S(m)$是$L^X$的并既约元,故$S$必常远于$Q\vee a\chi_X$,从而$x_a$是$S$关于$\delta_f$的聚点.充分性由$\delta\subset\delta_f$和定理1(1)推出.

(2) 设S关于δ收敛于x_a且$m(S)\geqslant a$.若$x_a\nleqslant Q\vee a\chi_X(Q\in\delta',a\in L)$,则$x_a\nleqslant Q$或$a\nleqslant a$.若$x_a\nleqslant Q$,由已知$S$必终远于$Q$.若$a\nleqslant a$,更有

$$a\ngeqslant\vee\{\wedge\bar{V}(S(m))|m\geqslant n\}|n\in D\},$$

从而存在$N\in D$使

$$a\ngeqslant\wedge\{\bar{V}(S(m))|m\geqslant n\}|n\in D\}.$$

易知$\forall m\geqslant N$,$a\ngeqslant\bar{V}(S(m))$.即S终远于$a\chi_X$.由于每个$S(m)$都是L^X的并既约元,故S必终远于$Q\vee a\chi_X$.而$Q\vee a\chi_X$是x_a关于δ_f的任意远域基元.这样就证明了x_a同样是S关于δ_f的极限点.充分性由定理1(3)推出.

推论[7] A是(L^X,δ)的良紧子集当且仅当A是(L^X,δ_f)的良紧子集.

我们已在文献[6]中搞清楚了强Hausdorff空间的良紧子集的层次结构,下面我们将讨论Hausdorff空间的良紧子集的构造.

定理3 Hausdorff空间(L^X,δ)的良紧子集一定是(L^X,δ_f)的闭集.(L^X,δ_f)的闭集一定是良

紧空间(L^X,δ)的良紧子集.

证明 设 A 是 Hausdorff 空间(L^X,δ)的良紧子集.由定理 2 推论知 A 同样是(L^X,δ_f)的良紧子集.而(L^X,δ_f)是满层 Hausdorff 空间,由定理 1 推论知 A 是(L^X,δ_f)的闭集.若(L^X,δ)是良紧的由定理 2 推论知(L^X,δ_f)同样是良紧的.又由[3]定理 4 知,(L^X,δ_f)的闭集一定是良紧子集,由定理 2 推论知,同样是(L^X,δ)的良紧子集.

由上定理和 δ_f 的定义立刻推得

推论 设 A 是 Hausdorff 良紧空间的子集,则 A 是良紧子集的充要条件是 A 可以表为

$$A=\wedge\ \{Q_i\vee a_i\chi_X|Q_i\in\delta',a_i\in L,i\in\Gamma\}.$$

定理 4 设 $f:X\to Y$ 是良紧空间(L^X,δ)到 Hausdorff 空间(L^Y,η)的连续映射,则 f 是(L^X,δ_f)到(L^Y,η_f)的闭映射.若 f 还是 $1-1$ 的,满的,则 f 是(L^X,δ_f)到(L^Y,η_f)的同胚映射.

证明 由满层化拓扑的定义易知 $f:X\to Y$ 同样是(L^X,δ_f)到(L^Y,η_f)的连续映射.由[3]定理 7 和定理 1 推论知 f 同样是闭映射.而 $1-1$ 的满的连续的闭映射是同胚映射.

为了证明本文的主要结果,还需如下引理.

引理 1[6] 强 Hausdorff 良紧空间是弱诱导的.

引理 2[6] Hausdorff 弱诱导空间是强 Hausdorff 的.

定理 5 设(L^X,δ)是 Hausdorff 良紧空间,则如下命题等价.

(1) (L^X,δ)是超紧的.

(2) (L^X,δ_f)是弱诱导.

(3) (L^X,δ_f)是强 Hausdorff 的.

证明 (1)⇒(2):由 $\delta\subset\delta_f\subset\omega_L(\iota_L(\delta))$知,$(X,\iota_L(\delta))$的紧性和$(L^X,\omega_L(\iota_L(\delta)))$的良紧性等价.易知$(L^X,\delta)$,$(L^X,\delta_f)$和$(L^X,\omega_L(\iota_L(\delta)))$都是 Hausdorff 良紧空间.$\forall\ Q\in\delta'$,$\forall\ a\in J(L)$,分明集 $Q_{[a]}=\{x\in X|Q(x)\geqslant a\}$是$(L^X,\omega_L(\iota_L(\delta)))$的闭集,当然也是良紧子集.又由 $\delta_f\subset\omega_L(\iota_L(\delta))$知 $Q_{[a]}$ 同样是(L^X,δ_f)的良紧子集,从而是满层 Hausdorff 空间(L^X,δ_f)的闭集,这样$\forall\ Q\in\delta'$,Q 都是$(X,[\delta_f])$的上半连续映射.另外,$\forall\ a\in L$,$a\chi_X$ 同样是$(X,[\delta_f])$上的上半连续映射.而$\forall\ P\in(\delta_f)'$,$P=\wedge\{Q_i\vee a_i\chi_X|Q_i\in\delta',a_i\in L,i\in\Gamma\}$.易知 P 同样是$(X,[\delta_f])$上的上半连续映射.即(L^X,δ_f)是弱诱导的.

(2)⇒(3):直接由引理 2 推得.

(3)⇒(1):由已知和定理 2 推论知(L^X,δ_f)同样是强 Hausdorff 良紧空间,从而是诱导的.而 $\omega_L(\iota_L(\delta))$是细于 δ 的最粗的诱导拓扑,故 $\delta_f=\omega_L(\iota_L(\delta))$.又因$(L^X,\omega_L(\iota_L(\delta)))$的良紧性和$(X,\iota_L(\delta))$紧性等价,故$(L^X,\delta)$是超紧的.

推论 1 设(L^X,δ)是满层 Hausdorff 良紧空间,则(L^X,δ)是超紧的当且仅当(L^X,δ)是强 Hausdorff 的.

推论 2 若(L^X,δ)是强 Hausdorff 良紧空间,则(L^X,δ)是超紧的.

在下文中我们称 S 为 a—网,如果 $M(S)\geqslant a$.

下面的引理自明.

引理 3 LF 拓扑空间(L^X,δ)是 F 紧的当且仅当它的每个 a—网及每个 $\gamma\ll a$ $(\gamma\in J(L))$,S 有高度为 γ 的聚点.

定理 6 设(L^X,δ)是 Hausdorff 空间，则(L^X,δ)的良紧性、强 F 紧性与 F 紧性彼此等价.

证明 由于良紧⇒强 F 紧性⇒F 紧性，所以只需证明 Hausdorff F 紧空间是良紧的. 设 S 是(L^X,δ)的 α—网，即 $M(S)\geqslant\alpha$. 由[3]知，不失一般性，我们总可以假定 S 的每个子网 T 均是 α—网，即 $M(T)\geqslant\alpha$. 现给定 $\beta\ll\alpha(\beta\in J(L))$. 由引理 3 知存在 $x\in X$，S 存在子网收敛于 x_β 且 $M(T)\geqslant\alpha$. 因 T 同样是 α—网，所以$\forall\ \gamma\ll\alpha(\gamma\in J(L))$，$T$ 又存在子网 T' 收敛于 y_γ. 而 T' 还收敛于 x_β. 从而 $x=y$. 这样$\forall\ \gamma\ll\alpha$，x_γ 均是 T 的聚点. 同样是 S 的聚点. 易证 x_α 必是 S 的聚点. 由 S 的任意性知(L^X,δ)是良紧的.

王国俊曾在[1]中提出如下问题：Hausdorff EF 空间的 F 紧性，强 F 紧，良紧性和超紧性是否等价. 据定理 6，这个问题可转化为 Hausdorff 良紧空间是否超紧的. 由定理 5 我们立刻得到如下结果.

定理 7 设(L^X,δ)是 Hausdorff 空间，则(L^X,δ)的 F 紧性，强 F 紧性，良紧性和超紧性等价的充要条件是(L^X,δ_f)是弱诱导空间或强 Hausdorff 空间.

由于当 L 的最大元是并既约元时，Hausdorff 空间一定是强 Hausdorff 的，故[1]的定理 6.4.29 仅是定理 5 推论 2 的特例.

参 考 文 献

[1] 王国俊，L—fuzzy 拓扑空间论，西安：陕西师大出版社，1988.
[2] 彭育威，数学进展，1987，16(1)：87—90.
[3] 彭育威，数学学报，1986，29(6)：555—558.
[4] Zhao Dongsheng，JMAA，1987，128：64—79.
[5] 王国俊，数学学报，1986，29(6)：535—538.
[6] 彭育威，数学年刊，1990，11A(6)：753—760.
[7] 徐晓泉，科学通报，1989，34(14)：1052—1054.
[8] 刘应明，罗懋康. 中国科学，1987，32A(4)：360—368.

Necessary and Sufficient Conditions for Hausdorff N-compact Space to Be Ultracompact

Peng Yuwei

(Southwest Institute for Nationlities, Chengdu, 610041.)

Abstract

The main results of this paper are as follow.

Theorem 5 A Hausdorff N-compact space (L^X,δ) is ultracompact if and only if its (L^X,δ_f) is a weakly induced space or strong Hausdouff space.

Theorem 7 Let (L^X,δ) be a Hausdorff space. Then its F-compactness, strong F-compactness, N-compactness and ultracompactness are equivalent to each other if and only if (L^X,δ_f) is a weakly induced space or strong Hausdorff space.