第12卷第4期 数学研究与评论 Vol. 12 No. 4
1992年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov. 1992

关于"卷积型"概率内积空间的评注*

巩馥洲
(西北大学数学系,西安 710069)

近几年来,国内有人[1],[2],[5]试图给概率内积空间一种新定义,在概率度量空间范畴内给通常内积空间的一个直接推广.特别是文[2],[5]在并未深入探讨这一概念的本质含义情况下,断言在此类概率内积空间得到了比通常内积空间情况更广泛的新结果,诸如Schwartz不等式、正交性质和一些不动点定理.但本文通过一个简短的论证说明了这种概率内积空间,从本质上讲,和通常内积空间是一回事.因而在概率度量空间范畴中,在这一框架中所作的工作从本质上无什么特别的意义,并不能得到什么"推广"和"新"的结果,它们只不过是通常内积空间相应工作的同义反复.

本文记号和概念皆与文[5]同,但为方便,我们称文[1],[2],[5]中的这种概率内积空间为"卷积型"的.值得一提的是,文[6],[7]所给出的随机内积空间框架和所得结果是非常有趣而重要的,有本质的改进与推广,是值得进一步加以研究的.

下面我们来给出主要结论的证明.

引理 1 设$(E,\mathscr{F},*)$为文[1],[2],[5]所定义的"卷积型"概率内积空间,若令

$$f_{x,y}(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{its}dF_{x,y}(s)\quad(\forall\ t\in \boldsymbol{R},\ x,y\in E)$$

为分布函数$F_{x,y}$的特征函数,则有

(a) $f_{\alpha x,y}(t)=f_{x,y}(\alpha t)\qquad(\forall\ t\in \boldsymbol{R},\ \alpha\in \boldsymbol{R},\ x,y\in E)$;

(b) $f_{x+y,z}(t)=f_{x,z}(t)f_{y,z}(t)\ (\forall\ t\in \boldsymbol{R},\ x,y,z\in E)$.

证明 若取$\Omega=[0,1]$,Ω中的所有Borel可测集$\mathscr{B}$组成Ω的σ一代数,p为Ω上的Lebesgue测度,则$(\Omega,\mathscr{B},p)$为概率空间,若令

$$\xi_{x,y}(w)=\sup\{t\in \boldsymbol{R}:F_{x,y}(t)<w\}\quad(\forall\ w\in\Omega,\ x,y\in E),$$

则$\xi_{x,y}$为$(\Omega,\mathscr{B},P)$上的随机变量,其分布函数是$F_{x,y}$.

若$\alpha>0$,则$\alpha\xi_{x,y}$的分布函数明显为$F_{\alpha x,y}$,因而仅需证明$-\xi_{x,y}$的分而函数为$F_{-x,y}$.

事实上,$\forall\ t\in \boldsymbol{R}$,记$[-\xi_{x,y}<t]=\{w\in\Omega:-\xi_{x,y}(w)<t\}$,则有

$$P([-\xi_{x,y}<t])=P([\xi_{x,y}>-t])=1-P[\xi_{x,y}\leqslant -t]=1-\lim_{\varepsilon\downarrow 0}F_{x,y}(-t+\varepsilon).$$

文[5]中定义(PI-4)说明:$-\xi_{x,y}$的分布函数为$F_{-x,y}$.由此(a)易证.而(b)可由文[5]中(PI-5)及[4]中特征函数性质得到.

引理 2 若$f(x)$为一个分布函数的特征函数,它还满足:

$$f(\alpha t+\beta s)=f(\alpha t)f(\beta s)\quad(\forall\ \alpha,\beta,t,s\in \boldsymbol{R}),\tag{1}$$

* 1991年10月4日收到.

则存在常数 $a\in\boldsymbol{R}$ 满足

$$f(t)=e^{\pm iat}\quad(\forall\ t\in\boldsymbol{R}).\tag{2}$$

证明 为方便先固定 t,记 $u=\alpha t, v=\beta s$,则(1)式可写成:

$$f(u+v)=f(u)f(v)\quad(\forall\ u,v\in\boldsymbol{R}).\tag{3}$$

若令 $f_1=\mathrm{Re}f, f_2=\mathrm{Im}f$,则 $f(u)=f_1(u)+if_2(u)$,而且由特征函数性质及(3)可得下述实值函数方程:

$$\begin{cases}f_1(u+v)=f_1(u)f_1(v)-f_2(u)f_2(v)\\ f_2(u+v)=f_1(u)f_2(v)+f_1(v)f_2(u)\\ f_1(0)=1,\ f_2(0)=0,\ f_1,f_2\text{连续有界}.\end{cases}\tag{4}$$

由[3]知,(4)仅有解

$$\begin{cases}f_1(u)=\cos au\\ f_2(u)=\sin(\pm au)\quad(\forall\ u\in\boldsymbol{R}),\end{cases}\tag{5}$$

由此可得(2).

定理 1 设$(E,\mathscr{F},*)$为文[1],[2],[5]定义的卷积型概率内积空间,那么在 E 上存在唯一的内积$(\cdot,\cdot)$,使 E 成为内积空间,而且有

$$F_{x,y}(t)=H(t-(x,y))\quad(\forall\ t\in\boldsymbol{R},\ x,y\in E).\tag{6}$$

证明 由(6)知内积的唯一性明显.我们仅证明存在性.任取 $x,y\in E$,由于 $\alpha,\beta\in\boldsymbol{R}$,由引理 1 及 2 知,$\forall\ t\in\boldsymbol{R}$,

$$f_{x,y}(\alpha t)f_{x,y}(\beta t)=f_{\alpha x,y}(t)f_{\beta x,y}(t)=f_{(\alpha+\beta)x,y}(t)=f_{x,y}(\alpha t+\beta t),$$

因而存在实数 $a_{x,y}\in\boldsymbol{R}$,满足

$$f_{x,y}(t)=e^{\pm ia_{x,y}t}\quad(\forall\ t\in\boldsymbol{R}).$$

从而由分布函数和特征函数关系知:

$$F_{x,y}(t)=H(t-a_{x,y})\quad(\forall\ t\in\boldsymbol{R}).$$

若定义$(x,y)=a_{x,y}$,则可由文[5]中(PI—1)～(PI—5)直接推出,$(\cdot,\cdot)$为 E 上的内积.

推论 1 在"卷积型"概率内积空间$(E,\mathscr{F},*)$中,下述结论等价:$\forall\ x,y\in E$,

$$\text{(a)}\quad\iiint\limits_{uv<w^2}\mathrm{d}F_{x,x}(u)\mathrm{d}F_{y,y}(v)\mathrm{d}F_{x,y}(w)=0.\tag{7}$$

$$\text{(b)}\quad\iiint\limits_{\substack{uv<w^2\\ u\geqslant0,v\geqslant0}}\mathrm{d}F_{x,x}(u)\mathrm{d}F_{y,y}(v)\mathrm{d}F_{x,y}(w)=0.\tag{8}$$

$$\text{(c)}\quad|(x,y)|\leqslant\|x\|\ \|y\|.\tag{9}$$

其中(x,y)为定理 1 中所给内积,$\|x\|$,$\|y\|$由内积诱导的范数.

证明 将(6)分别代入(7)(8)可得(9).而按(6)式所记,由(9)可直接得到(7)(8).

推论 2 $(E,\mathscr{F},*)$如定理 1 所设,则下述条件等价:

(1) $F_{x,y}(t)=H(t)\quad(\forall\ t\in\boldsymbol{R})$.

(2) $(x,y)=0$.

从而由文[5]所定义的正交性及第七小节所给定理仅是内积空间$(E,(\cdot,\cdot))$中相应结论的同义反复.

推论 3 $(E,\mathscr{F},*)$如定理 1 所设，E 完备. T 为 E 上自映射，则在内积$(\cdot,\cdot)$下 E 成为 Hilbert 空间，而且下列条件等价：

(a) 存在常数 $k\in(0,1)$，且对任一 $x\in E$，存在正整数 $n(x)$满足：$\forall\ t>0, y\in E$,

$$F_{T^{n(x)}x-T^{n(x)}y,\,T^{n(x)}x-T^{n(x)}y}(t)\geqslant F_{x-y,x-y}\frac{t}{k}$$

(b) 存在同样的常数 $k\in(0,1)$及正整数 $n(x)$满足

$$\|T^{n(x)}x-T^{n(x)}y\|\leqslant\sqrt{k}\,\|x-y\|\quad(\forall\ y\in E, x\in E).$$

因而由[8]中的主要定理可得到这一特殊情况下的不动点定理. 其中$\|\cdot\|$为内积$(\cdot,\cdot)$诱导的范数.

注 文[5]中第八小节的定理所述条件有误，根据文[5]的证明过程可看出，相应条件应为推论 3 中(a).

综上所述，由定理 1 及推论 1～3 可明显看出，文[1]，[2]，[5]特别是文[5]中有关结果皆是内积空间相应结果的同义反复. 在概率度量空间范畴内，文[1]，[2]，[5]所给出的概率内积空间定义是不妥当的.

参 考 文 献

[1] 张石生，康世焜，杨泽江，概率内积空间理论(待发表)

[2] 王元，概率内积空间的拓扑性质及应用，河南师范大学学报(自)，1988(1).

[3] Б. Л. 吉米多维奇，数学分析习题集(李荣冻译)，人民教育出版社 (1979). P88.

[4] Loéve. M, *Probability Theory*, New York, D. Van. Nastrand (1955), P193.

[5] 丁佐华，概率内积空间，数学研究与评论，Vol. 9 No. 4 (1989), 591—600.

[6] 林熙，郭铁信，随机内积空间，科学通报，35:22(1990), 1707—1709.

[7] 刘清荣，巩馥洲，一类随机内积空间的正交投影及其应用，数学年刊(A 辑) 3(1992), 296—305.

[8] Rhoades. B. E, Notics Amer. Math. Soc. 24(1977), A—427.