第12卷第4期 数学研究与评论 Vol. 12 No. 4
1992年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov. 1992

凝聚局部代数*

唐高华

(广西师范学院数学系，南宁 535000)

摘要

通过引进 S—代数的概念，把交换代数和非交换代数联系起来，[1]和[2]在 Noether 局部代数上定义了有限生成模的级(grade)，研究了 Noether 局部代数，推广了著名的 Auslander—Buchsbaum 定理. 本文将在凝聚局部代数上引进模的级的概念，对凝聚局部代数进行研究，得到了一些新结果，而使得关于 Noether 局部代数的一些经典结果成为本文中相应定理的特殊情况.

本文中 S 始终代表有单位元的交换环，Λ 是有单位元的环，但不一定是交换的，模指西模. J 代表环 Λ 的 Jacobson 根. 符号以[1]为准.

定义 1 设 Λ 是 S—代数，Λ 是局部环，J 是它的 Jacobson 根. 如果存在 S 的理想 C，使得 $J^n\subseteq C\Lambda\subseteq J$，这里 n 是某个正整数，则称 Λ 是半交换的；如果存在 S 的理想 C，满足 $C\Lambda=J$，则称 Λ 为强半交换的，如果存在 S 的有限生成理想 C 和某个正整数 n，使得 $J^n\subseteq C\Lambda\subseteq J$，则称 Λ 为 F—半交换的.

本文主要研究一种强半交换的凝聚局部代数，关于 F—半交换的局部代数也有一些相应的结果，由于论证方法较类似，本文不再详述.

命题 1 设 Λ 是 S—代数，且是凝聚局部代数，且 W. gl. dim$\Lambda<\infty$，C 是 S 的理想，A 是有限表现的左 Λ—模，则在 C 中的任何 A—序列的长度有限，且不超过 W. gl. dimΛ.

证明 参看[3]定理 4.1 和定理 4.4 的证明. □.

定义 2 设 Λ 是 S—代数，Λ 是凝聚局部环，W. gl. dim$\Lambda<\infty$，A 是一个有限表现的 Λ—模，C 是 S 的一个理想，$CA\neq A$，则定义 A 在 C 中的级为所有 A 在 C 中的 A—序列的长度的上确界. 记为 $\mathrm{gr}_S\{C;A\}$. 若$\forall\ a\in C$，a 关于 A 都为零因子，则令 $\mathrm{gr}_S\{C;A\}=0$. 由命题 1 知，$\mathrm{gr}_S\{C;A\}\leqslant$W. gl. dim$\Lambda$.

若 C,C' 均为 S 的有限生成理想，$C'A=CA$，A 是有限表现的 Λ—模，且 A 的每个有限生成子模作为 S—模，在 A 内有准素分解，则不难证明：$\mathrm{gr}_S\{C;A\}=\mathrm{gr}_S\{C';A\}$.

由[1]、[2]和[3]容易证得：

引理 1 设 Λ 是 S—代数，A 是左 Λ—模，K 是 A 的 Λ—子模，且作为 S—模在 A 内有准素分解，C 是 S 的有限生成理想，则下列条件等价：

* 1990年9月20日收到.

(i) C 不包含在任何属于 K 的素理想中；

(ii) 存在 $a\in C$，使得 $K:_{\Lambda}a=K$；

(iii) $K:_{\Lambda}C=K$. □

引理 2 设 Λ 是 $S-$代数，若 Λ 是整环，C 是 S 的有限生成理想，则下列条件等价：

(i) 存在 $a\in C$，使得 $0:_{\Lambda^{\Lambda}}a=0$；

(ii) $0:_{\Lambda^{\Lambda}}C=0$.

证明 (i)⇒(ii) 显然.

(ii)⇒(i) 用反证法. 若 $\forall\ a\in C, a\neq 0$，有：$0:_{\Lambda^{\Lambda}}a\neq 0$，即 $\forall\ a\neq 0, a\in C$，$\exists\ \lambda\in\Lambda, \lambda\neq 0$，使得 $\lambda a=0$，又 C 是 S 的有限生成理想，不妨设 $C=a_1S+\cdots+a_nS$，于是 $\forall\ 1\leqslant i\leqslant n$，存在 $\lambda_i\in\Lambda, \lambda_i\neq 0$，但 $a_i\lambda_i=0$. 令 $\lambda=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$，因 Λ 是整环，故 $\lambda\neq 0$，又 $\varphi(S)$ 含于 Λ 的中心，因而 $a_i\lambda=0$，$\forall\ 1\leqslant i\leqslant n$，从而 $C\lambda=0$，这与 $0:_{\Lambda^{\Lambda}}C=0$ 矛盾. □

在下面的讨论中，如不特别说明，我们始终假定 Λ 是 $S-$代数，φ 是结构同态，Λ 是凝聚局部环，J 是有限生成的，$J\subseteq\varphi(S)$，记 $\varphi^{-1}(J)=C$ 是 S 的有限生成理想. 此时，易见 $C\Lambda=J$，因而 Λ 是强半交换的 $S-$代数.

引理 3 如果 Λ 是整环，且 $\mathrm{gr}_S\{J;_{\Lambda}\Lambda\}=0$，则存在 $\lambda\in\Lambda$，使得 $\lambda\neq 0$，但 $\lambda J=0$.

证明 因为 $\mathrm{gr}_S\{J;_{\Lambda}\Lambda\}=\mathrm{gr}_S\{C;_{\Lambda}\Lambda\}$，而 $C=\varphi^{-1}(J)$ 是 S 的有限生成理想，我们说 $0:_{\Lambda^{\Lambda}}C\neq 0$，否则，若 $0:_{\Lambda^{\Lambda}}C=0$，由引理 2 知，存在 $a\in C$，使得 $0:_{\Lambda^{\Lambda}}a=0$，因而 a 关于${}_{\Lambda}\Lambda$ 不是零因子，这与已知 $\mathrm{gr}_S\{J;_{\Lambda}\Lambda\}=\mathrm{gr}_S\{C;_{\Lambda}\Lambda\}=0$ 矛盾. 故 $0:_{\Lambda^{\Lambda}}C\neq 0$. 因而必存在 $\lambda\in\Lambda, \lambda\neq 0$，且 $C\lambda=0$. 又 $\varphi(C)$ 在 Λ 的中心内，所以 $\lambda C=0, \lambda J=\lambda(C\Lambda)=0$. □

有了这些准备，我们可以着手证明本文的主要定理了. 它是 Auslander－Buchsbaum 定理的又一推广形式.

定理 1 如果 W. gl. $\dim\Lambda<\infty$，A 是有限表现的左 $\Lambda-$模，A 的每个有限生成的子模作为 $S-$模在 A 内有准素分解，且当 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是在 C 中的 $\Lambda-$序列时，$\Lambda/(a_1\Lambda+\cdots+a_n\Lambda)$ 是整环，则

$$\mathrm{gr}_S\{J;A\}+\mathrm{l.\,pd}_{\Lambda}(A)=\mathrm{gr}_S\{J;_{\Lambda}\Lambda\}.$$

证明 由已知，$\mathrm{gr}_S\{J;_{\Lambda}\Lambda\}=\mathrm{gr}\{C;_{\Lambda}\Lambda\}=m.\leqslant$W. gl. $\dim\Lambda<\infty$. 这里 $C=\varphi^{-1}(J)$ 是 S 的有限生成理想. 我们对 m 用数学归纳法.

1° $m=0$，由引理 3 知，存在 $\lambda\in\Lambda, \lambda\neq 0, \lambda J=0$. 由[3]定理 2.1 知，$A$ 是一个非零自由模，从而 $\mathrm{l.\,pd}_{\Lambda}(A)=0$，又因为 $\mathrm{gr}\{C;_{\Lambda}\Lambda\}=0$，故 C 中的每个元素关于 Λ 是零因子，因而也都是关于 A 的零因子. 从而 $\mathrm{gr}_S\{J;A\}=\mathrm{gr}\{C;A\}=0$. 于是当 $m=0$ 时，定理成立.

2° 设 $m>0$，并且假设对于小于 m 的情形定理已成立. 由 $\mathrm{gr}\{C;_{\Lambda}\Lambda\}=m>0$ 知，必存在 C 中的极大 $\Lambda-$序列 $a, a_1, \cdots, a_{m-1}$（其长度恰为 m），其中 a 关于 Λ 不是零因子. 下面我们对 $\mathrm{gr}_S\{J;A\}$ 分两种情形进行讨论.

① 设 $\mathrm{gr}_S\{J;A\}=0$. 即 $\mathrm{gr}\{C;A\}=0$，此时证明 $\mathrm{l.\,pd}_{\Lambda}(A)=m$ 即可.

由于 Λ 是局部环，因而 Λ 是半完全环，由[4]定理 27.6 及推论 26.7 知，A 有投射覆盖 (F, ψ) 且 $K=\mathrm{Ker}\psi\subseteq JF$，$F$ 是含有有限基的自由模. 由[5]知，凝聚环上自由模的任意有限生成的子模是有限表现的，故 K 是有表现的. 又 a 关于 Λ 不是零因子，因而 a 关于 F 和 K 都不是零因子. 于是由[3]定理 4.1 的推论 1 知：

$$\mathrm{l.pd}_{\Lambda/a\Lambda}(K/aK)=\mathrm{l.pd}_{\Lambda}(K)\overset{[3]定理1.3}{=}\mathrm{W.l.dh}_{\Lambda}(K)\leqslant \mathrm{W.gl.dim}\Lambda<\infty.$$

又已知 $\mathrm{gr}\{C;\Lambda\}=0$，因此 a 关于 Λ 是零因子，从而 Λ 不是自由模，再由[4]推论 26.7 知，Λ 不是投射模. 于是在正合序列：$0\to K\to F\xrightarrow{\psi}\Lambda\to 0$ 中，$K\neq 0$，且 $\mathrm{l.pd}_{\Lambda}(\Lambda)>0$，再由[1]定理 2(P232)知，$\mathrm{l.pd}_{\Lambda}(K)=\mathrm{l.pd}_{\Lambda}(\Lambda)-1$，故 $\mathrm{l.pd}_{\Lambda}(\Lambda)=\mathrm{l.pd}_{\Lambda}(K)+1=\mathrm{l.pd}_{\Lambda/2\Lambda}(K/aK)+1$. 现在考虑 $\Lambda/a\Lambda$，它是以 $J/a\Lambda$ 为 Jacobson 根的左凝聚局部环，令：$\pi:\Lambda\to\Lambda/a\Lambda$ 是环的自然同态，则 $\Lambda/a\Lambda$ 是 S—代数，且结构同态为 $\varphi'=\pi\varphi$，$\varphi'^{-1}(J/a\Lambda)=(\pi\varphi)^{-1}(J/a\Lambda)=\varphi^{-1}(J)=C$，且 $C\cdot\Lambda/a\Lambda=J/a\Lambda$. 由[1]定理 1(P309)易得 $\mathrm{W.gl.dim}\Lambda/a\Lambda\leqslant\mathrm{W.gl.dim}\Lambda-1<\infty$，因而易知 $\Lambda/a\Lambda$ 满足定理的条件. 由于 $a,a_1\cdots,a_{m-1}$ 是 C 中的极大 Λ—序列，易见 $a_1,\cdots,a_{m-1}$ 是 C 中的极大 $\Lambda/a\Lambda$—序列，且

$$\mathrm{gr}_S\{J/a\Lambda;\Lambda/a\Lambda\}=\mathrm{gr}\{C;\Lambda/a\Lambda\}=m-1.$$

于是对有限表现的 $\Lambda/a\Lambda$—模 K/aK 应用归纳假设得：

$$\mathrm{l.pd}_{\Lambda/a\Lambda}(K/aK)+\mathrm{gr}\{C;K/aK\}=\mathrm{gr}\{C;\Lambda/a\Lambda\}=m-1.$$

从而：

$$\mathrm{l.pd}_{\Lambda}(\Lambda)+\mathrm{gr}\{C;K/aK\}=m. \tag{1}$$

这样，要证 $\mathrm{l.pd}_{\Lambda}(\Lambda)=m$，只要证 $\mathrm{gr}\{C;K/aK\}=0$ 即可. 因 $\mathrm{gr}\{C;\Lambda\}=0$，由引理 1 知，必存在 $x\in\Lambda$，使得 $x\neq 0$ 且 $Cx=0$. 否则，有 $0:_{\Lambda}C=0$. 由引理 2，存在 $a\in C$，使得 $0:_{\Lambda}a=0$，因而 a 关于 Λ 不是零因子，这与 $\mathrm{gr}\{C;\Lambda\}=0$ 矛盾. 又 ψ 为满同态，故存在 $\xi\in F$，使得 $\psi(\xi)=x$，所以 $C\xi\subseteq\mathrm{Ker}\psi=K$，特别地，$a\xi\in K$. 我们说 $a\xi\notin aK$，否则，若 $a\xi\in aK$，则 $a\xi=a\xi'$ 即 $a(\xi-\xi')=0$，但 $\psi(\xi)=x\neq 0$，故 $\xi\notin K$，$\xi'\in K$，从而 $\xi-\xi'\in F$ 且 $\xi-\xi'\neq 0$，因而，a 关于 F 是零因子，这与假设矛盾. 故 $a\xi\notin aK$. 又 $C(a\xi)=a(C\xi)\subseteq aK$，于是 $aK:_K C\neq aK$. 因而，$\mathrm{gr}(C;K/aK)=0$. 否则，若 $\mathrm{gr}\{C;K/aK\}\neq 0$，则存在 $\gamma\in C$，$\gamma\neq 0$，$0:_{K/aK}\gamma=0$，即 $aK:_K\gamma=aK$，由引理 1 得，$aK:_K C=aK$，矛盾. 故 $\mathrm{gr}\{C;K/aK\}=0$，于是由(1)式知，$\mathrm{l.pd}_{\Lambda}(\Lambda)=m=\mathrm{gr}_S(J;{}_{\Lambda}\Lambda)$.

② 设 $\mathrm{gr}_S\{J;A\}=n>0$，又 A 是有限生成的左 Λ—模，故必存在 C 中的极大 A—序列 $a,a_1,\cdots,a_{n-1}$，且 a 关于 Λ 和 A 都不是零因子(因为 Λ 是整环). $\varphi(a)$ 属于 Λ 的中心，由[3]定理 4.1 的推论知

$$\mathrm{l.pd}_{\Lambda/a\Lambda}(A/aA)=\mathrm{l.pd}_{\Lambda}(A),\mathrm{l.pd}_{\Lambda}(A/aA)=\mathrm{l.pd}_{\Lambda}(A)+1.$$

又 $\mathrm{gr}_S\{J;A/aA\}=\mathrm{gr}\{C;A/aA\}=\mathrm{gr}\{C;A\}-1=\mathrm{gr}_S\{J;A\}-1$，所以

$$\mathrm{l.pd}_{\Lambda}(A/aA)+\mathrm{gr}_S\{J;A/aA\}=\mathrm{l.pd}_{\Lambda}(A)+\mathrm{gr}_S\{J;A\}.$$

令 $A_1=A/aA$，则 A_1 是有限表现的左 Λ—模. 且其每个有限生成的子模作为 S—模在 A_1 内有准素分解. 因而

$$\mathrm{l.pd}_{\Lambda}(A_1)+\mathrm{gr}_S\{J;A_1\}=\mathrm{l.pd}_{\Lambda}(A)+\mathrm{gr}_S\{J;A\}.$$

及 $\mathrm{gr}_S\{J;A_1\}=\mathrm{gr}_S\{J;A\}-1$.

不断重复上面的讨论，最后必得到有限表现的左 Λ—模 A_m，其每个有限生成的子模作为 S—模在 A_m 内有准素分解，且

$$\mathrm{l.pd}_{\Lambda}(A_m)+\mathrm{gr}_S\{J;A_m\}=\mathrm{l.pd}_{\Lambda}(A)+\mathrm{gr}_S\{J;A\}$$

及 $\mathrm{gr}_S\{J;A_m\}=\mathrm{gr}_S\{J;A\}-m=0$. 由 1°的证明知

$$\mathrm{l.pd}_{\Lambda}(A_m)+\mathrm{gr}_S\{J;A_m\}=\mathrm{gr}_S\{J;{}_{\Lambda}\Lambda\}.$$

故 $\mathrm{l.pd}_\Lambda(A)+\mathrm{gr}_S\{J;A\}=\mathrm{gr}_S\{J;{}_\Lambda\Lambda\}$. 故 $\mathrm{gr}_S\{J;A\}>0$ 时，定理也成立. 综上可知定理成立. □

下面我们给出一个例子，说明存在环 Λ，Λ 满足定理 1 的条件，但 Λ 是非交换的，且不是 Noether 环. 首先我们有：

引理 4 设 Λ 是局部环，且 $\mathrm{l.gl.dim}\Lambda\leqslant 2$，则 Λ 是整环，且是凝聚环. $\mathrm{l.gl.dim}\Lambda$ 表示 Λ 的左整体维数.

证明 参看[7](1)和(2)的证明.

定理 2 存在一个非交换环 Λ 和一个交换环 S，它们满足定理 1 的条件，但 Λ 不是 Noether 环.

证明 设 D 是一个非交换除环，令 $A=D[x_1,x_2]$ 是 D 上关于未定元 x_1,x_2 的多项式环，则 A 是左和右 Noether 局部环，A 的 Jacobson 根记为 J_A，则 $J_A=x_1A+x_2A$ 是由 x_1,x_2 生成的理想. 由 Hilbert 合冲定理知，$\mathrm{l.gl.dim}A=\mathrm{r.gl.dim}A=\mathrm{l.gl.dim}D+2=2$. 于是由引理 4 知，$A$ 是 Noether 整环，由[8]命题 1.7(P53)知 A 是 *ore* 整环，再由[8]例 3(P52)知，A 有分式环 D^*，且 D^* 是除环. $D^*[[t]]$ 是关于未定元 t 的幂级数环，令：$\Lambda=A[[(t)]]=\{f(t)\in D^*[[t]]\,|\,f(t)$ 的常数项在 A 中$\}$. 类似于[7]中(7)的证明易知，Λ 是非交换的局部环，$\mathrm{l.gl.dim}\Lambda=2$，且 Λ 不是 Noether 环. 又由引理 4 知 Λ 是凝聚整环. 它的 Jacobson 根为 $J=J_A+t\Lambda=x_1\Lambda+x_2\Lambda+t\Lambda=x_1\Lambda+x_2\Lambda+t\Lambda$ 是由 x_1,x_2,t 生成的理想. 取 $S=Z[y_1,y_2,y_3]$ 是整数 Z 环上关于无关未定元 y_1,y_2,y_3 的多项式环. 令：φ: $Z[y_1,y_2,y_3]\to A[[t]]$ 使得 $\varphi(y_1)=x_1$，$\varphi(y_2)=x_2$，$\varphi(y_3)=t$，则 φ 是一个结构同态，且 $C=\varphi^{-1}(J_A)=y_1S+y_2S+y_3S$ 是有限生成的. $\varphi^{-1}(J_A)\Lambda=J_A$. 又，如果 $a_1,\cdots,a_n$ 是 C 中的 Λ－序列，则：

$$\mathrm{l.gl.dim}\Lambda/(a_1\Lambda+\cdots+a_n\Lambda)\leqslant \mathrm{l.gl.dim}\Lambda-n\leqslant 2.$$

故由引理 4 知 $\Lambda/(a_1\Lambda+\cdots+a_n\Lambda)$ 仍为局部整环. 因此，这样的环 Λ 满足定理 1 的条件，且 Λ 是非交换的非 Noether 环. □

类似于定理 1 的证明，我们可以得到：

定理 1′ 如果 $\mathrm{W.gl.dim}\Lambda<\infty$，$A$ 是有限表现的左 Λ－模，且 ${}_\Lambda\Lambda$ 和 A 的每个有限生成的子模作为 S－模有准素分解，则：

$$\mathrm{gr}_S\{J;A\}+\mathrm{l.pd}_\Lambda(A)=\mathrm{gr}_S\{J;{}_\Lambda\Lambda\}.$$ □

关于 Λ 的弱整体维数和 J 的结构的关系，我们有以下两个主要定理.

定理 3 若存在一个由 S 的元 $a_1,a_2,\cdots,a_q$ 组成的 Λ－序列，使得 $J=a_1\Lambda+a_2\Lambda+\cdots+a_q\Lambda$，则 $\mathrm{W.gl.dim}\Lambda=q$.

证明 若 $J=0$，则 Λ 是除环，此时显然结论成立. 现在设 $J\neq 0$，$a_1,a_2,\cdots,a_q$ 是一个 Λ－序列，且 $a_1\Lambda+a_2\Lambda+\cdots+a_q\Lambda=J$，由已知 $J\neq\Lambda$，于是由[3]定理 4.1 得 $\mathrm{l.pd}_\Lambda(\Lambda/J)=q$. 于是，$\mathrm{W.gl.dim}\Lambda\geqslant q$. 下面还需证明 $\mathrm{W.gl.dim}\Lambda\leqslant q$. 由[6]引理 0.10 易知.

$$\mathrm{W.gl.dim}\Lambda=\mathrm{Sup}\{W.l.dh_\Lambda(\Lambda/I)\,|\,I\ \text{是}\ \Lambda\ \text{的有限生成的左理想}\}.$$

因而

$$\mathrm{W.gl.dim}\Lambda=\mathrm{Sup}\{W.l.dh_\Lambda(M)\,|\,M\ \text{是有限表现的左}\ \Lambda-\text{模}\}\ (\text{因为}\ \Lambda\ \text{是凝聚环}).$$

令 A 是任一有限表现的左 Λ－模，要证明 $\mathrm{l.pd}_\Lambda(A)\ (=W.l.dh_\Lambda(A))\leqslant q$ 即可. 我们对 q 用数学归纳法.

若 $q=0$，则 Λ 是除环，此时 $\mathrm{l.pd}_\Lambda(A)=0$.

若 $q\geqslant 1$，假设对于小于 q 的情形，结论已经成立. 如果 A 是投射模，则 $\mathrm{l.pd}_\Lambda(A)\leqslant q$，因此，

仅需考虑 A 不是投射模的情形. 由于 Λ 是凝聚局部环, A 是有限表现的. 故必存在正合序列 $0\to K\to P\to A\to 0$, 这里 P 是一个含有有限基的自由模. K 是 P 的有限生成的子模. a_1 关于 A 不是零因子, 因而 a_1 关于 P 和 K 都不是零因子. 由[3]定理 4.1 的推论得:

$$\mathrm{l.pd}_{\Lambda/a_1\Lambda}(K/a_1K)=\mathrm{l.pd}_{\Lambda}(K)=\mathrm{l.pd}_{\Lambda}(A)-1.$$

而由定理 1 的证明知 $\Lambda/a_1\Lambda$ 也满足定理的条件. 它的 Jacobson 根是 $J/a_1\Lambda$, 且存在一个由 S 的元素 $a_2,\cdots,a_q$ 组成的 $\Lambda/a_1\Lambda$—序列, 使得 $J/a_1\Lambda=a_2(\Lambda/a_1\Lambda)+\cdots+a_q(\Lambda/a_1\Lambda)$. 由归纳假设得:

$$\mathrm{W.gl.dim}(\Lambda/a_1\Lambda)=q-1,$$

故有

$$\mathrm{l.pd}_{\Lambda}(A)-1=\mathrm{l.pd}_{\Lambda/a_1\Lambda}(K/a_1K)\leqslant q-1,$$

所以, $\mathrm{l.pd}_{\Lambda}(A)\leqslant q$, 因此 $W.g.l.\dim\Lambda=q$. □

引理 5 若 $\mathrm{gr}_S\{J;{}_\Lambda\Lambda\}>0$, 且 Λ 的 0 子模作为 S—模在 Λ 内有准素分解, 则存在 $a\in S$, a 关于 Λ 不是零因子, 且 $a\Lambda\subseteq J$. 但 $a\Lambda\not\subseteq J^2$.

证明 参看[2]引理 6(P194)的证明.

定理 4 若${}_\Lambda\Lambda$ 的每个有限生成子模作为 S—模在 Λ 内有准素分解, 则下列条件等价:

(i) $\mathrm{W.gl.dim}\Lambda<\infty$;

(ii) $\mathrm{l.pd}_{\Lambda}(\Lambda/J)<\infty$;

(iii) 存在由 S 的元素 $a_1,a_2,\cdots,a_q$ 组成的 Λ—序列, 使得

$$J=a_1\Lambda+a_2\Lambda+\cdots+a_q\Lambda. \tag{2}$$

另外

$$\mathrm{W.gl.dim}\Lambda=\mathrm{l.pd}_{\Lambda}(\Lambda/J), \tag{3}$$

且任何一个满足(2)的元素组成的 Λ—序列所含元素的个数就是(3)的公共值.

证明 (i)⇒(ii)显然, (iii)⇒(i)是定理 3 的直接结果. 因此, 仅需证(ii)⇒(iii)即可.

(ii)⇒(iii) 设 $\mathrm{gr}_S\{J;{}_\Lambda\Lambda\}=t$, 对 t 作数学归纳法. 若 $t=0$, 由定理 1′得

$$\mathrm{gr}_S\{J;\Lambda/J\}+\mathrm{l.pd}_{\Lambda}(\Lambda/J)=\mathrm{gr}_S\{J;{}_\Lambda\Lambda\}=0.$$

因而 $\mathrm{l.pd}_{\Lambda}(\Lambda/J)=0$. 故 Λ/J 为左 Λ—投射模, 由[1]§8.3 定理 1 的推论知, Λ/J 为左 Λ—自由模. 但 $J(\Lambda/J)=0$, 因而 $J=0$, 故 $t=0$ 时结论成立.

若 $t>0$, 假设对于小于 t 的情形结论已成立. 因 $\mathrm{gr}_S\{J;{}_\Lambda\Lambda\}>0$, 由引理 5 知, 必存在 $a\in S$, 使得 a 关于 Λ 不是零因子, 且 $a\Lambda\subseteq J$, $a\Lambda\not\subseteq J^2$. 令 $\Lambda^*=\Lambda/a\Lambda$, $J^*=J/a\Lambda$, 由定理 1 的证明易知 Λ^* 也满足定理的条件, 且

$$\mathrm{gr}_S\{J^*;\Lambda^*\}=\mathrm{gr}\{C;\Lambda/a\Lambda\}=\mathrm{gr}\{C;{}_\Lambda\Lambda\}-1=t-1.$$

由归纳假设, 则必存在 S 的元素 $a_2,\cdots,a_q$ 组成的 Λ^*—序列, 使得 $J^*=a_2\Lambda^*+\cdots+a_q\Lambda^*$. 因此 $a_1,a_2,\cdots,a_q$ 是 S 的元素组成的 Λ—序列, 且 $J=a\Lambda+a_2\Lambda+\cdots+a_{q}\Lambda$. 由[3]定理 4.1 得

$$q=\mathrm{l.pd}_{\Lambda}((\Lambda/a\Lambda+a_2\Lambda+\cdots+a_q\Lambda))=\mathrm{l.pd}_{\Lambda}(\Lambda/J).$$

故当 $\mathrm{gr}_S\{J;{}_\Lambda\Lambda\}=t$ 时, 结论也成立. 综上可知, 定理成立. □

参 考 文 献

[1] 程福长，同调代数，广西师大出版社，1989.

[2] D. G Northcott F. R. S. , *A First Course of Homological Algebra*. Cambridge University Press, 1973, 178—197.

[3] 唐高华，凝聚环的同调性质，硕士论文，1989.

[4] F. W. Anderson, K. R. Fuller, *Rings and Categories of Modules*, Springer—Verlag, 1974, 300—305.

[5] S. U. Chase, *Direct product of modules*, Trans of the Amer. Math. Soc. Vol. 97, 1960, 457—473.

[6] W. V. Vasconcelos, *The Rings of Dimension Two*, the State University of New Jersey, New Jersey, 1976.

[7] W. V. Vasconcelos, *The local rings of dimension Two*, Proc. Amer. Math. Soc. Vol. 35, No. 2, 1972, 381—386.

[8] Bo. Stenström, *Rings of Quotients*, Springer—Verlg, Berlin Heidelberg New York, 1975, 52—54.

Coherent Local Algebras

Tang Gaohua

(Dept. Math., Guang Xi Teachers' College, Nanning)

Abstract

We use the notion of the grade of modules on a coherent local algebra to discuss the coherent local algebras and obtained some generalizations of some classical results on the Noetherian local algebras.