第12卷第4期 数学研究与评论 Vol. 12 No. 4
1992年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov. 1992

一个定义在任意三角网格上的五次 GC^1 插值格式*

施锡泉 王天军
(大连理工大学数学科学研究所,116024) (北京航空航天大学七系,100083)

1. 引论

计算几何中的曲面设计,由于在汽车、船舶、飞机的外型设计,以及在人造器官和机器人等领域中的广泛应用,已越来越引起人们的注意,尤其几何光滑(或称视觉光滑,记为 GC^1)曲面的研究更是受到人们的重视. 所谓几何光滑是指两个曲面片沿连接处位置连续和切平面连续. 这个问题 Barnhill[2]做为一个公开问题提出来. 本文构造出插值位置向量的五次 GC^1 光滑曲面.

定义 1.1 一个由网点、网线和网面组成的集合称为一个三角网格,如果它满足下面的条件:

i) 如果一个三角形属于 Δ,则它的所有边和点都属于 Δ;

ii) 如果 $S_1,S_2\in\Delta$,则 $S_1\cap S_2\in\Delta$;

iii) 如果两个 i 维单纯形 $S_1,S_2\in\Delta$,则 $S_1\cap S_2$ 是空集或是一个维数小于 i 的单纯形.

定义 1.2 设网点 $T_0\in\Delta$,则包含 Δ 中所有以 T_0 为一顶点的三角形的三角网格,称为一个(关于 T_0 的)关联三角网格,记为 $R(T_0)$.

如果只有一个 Δ 中的三角形以网线 L 为一边,则称 L 为边界网线;否则称为内网线. 边界网线的端点称为边界网点;否则称为内网点.

设 $V:=V[T_0,T_1,T_2]$ 是一个空间三角形,则

$$P(T)=\sum_{i+j+k=n} b_{i,j,k}B^n_{i,j,k}(u_0,u_1,u_2) \tag{1.1}$$

称为一个(关于 V 的) n 次三角片,其中 $b_{i,j,k}\in R^3$, $B^n_{i,j,k}(u_0,u_1,u_2)=\dfrac{n!}{i!\ j!\ k!}u_0^iu_1^ju_2^k$, (u_0,u_1,u_2) 是 $T\in V$ 关于 V 的面积坐标.

2. 主要结果

设 $V_1:=V[T_0,T_1,T_2]$ 和 $V_2:=V[T_0,T_1,T_3]$ 是两个相邻的三角形,

$$P_1=\sum_{i+j+k=n} b^{(1)}_{i,j,k}B^n_{i,j,k}(u_0,u_1,u_2) \tag{2.1}$$

和

$$P_2=\sum_{i+j+k=n} b^{(2)}_{i,j,k}B^n_{i,j,k}(u_0,u_1,u_3) \tag{2.2}$$

是分别定义在 V_1 和 V_2 上的三角片. 显然, P_1 和 P_2 之间 GC^1 光滑连接的充要条件是

$$P_1(T)=P_2(T), \tag{2.3}$$

* 1990年1月17日收到.

$$\det(D_{0,1}P_1(T), D_{0,2}P_1(T), D_{0,3}P_2(T)) = 0, \quad T \in T_0T_1, \tag{2.4}$$

其中 $D_{0,i}=\dfrac{\partial}{\partial\,(T_i-T_0)}$,

特别地，在(2.3)和(2.4)中，令 $n=5$，则当

$$\begin{cases} P_1(T) = P_2(T) \\ (\alpha_{0,1}u_0+\beta_{0,1}u_1)D_{0,1}P_1(T) + (\alpha_{0,2}u_0+\beta_{0,2}u_1)D_{0,2}P_1(T) + (\alpha_{0,3}u_0+\beta_{0,3}u_1)D_{0,3}P_2(T) = 0. \end{cases} \tag{2.5}$$

时，P_1 和 P_2 之间 GC^1 光滑连接，其中 (u_0,u_1) 是 $T\in T_0,T_1$ 的重心坐标，$\alpha_{0,i},\beta_{0,i}$ 是不全为零的实常数.

由于

$$\begin{aligned}(\alpha_{0,1}u_0+\beta_{0,1}u_1)D_{0,1}P_1(T) &= 5(\alpha_{0,1}u_0+\beta_{0,1}u_1)\sum_{i=0}^{4}(b^{(1)}_{4-i,i+1,0}-b^{(1)}_{5-i,i,0})B^4_{4-i,i,o}(u_0,u_1,0) \\ &= 5\sum_{i=0}^{5}\big[C_4^i\alpha_{0,1}(b^{(1)}_{4-i,i+1,0}-b^{(1)}_{5-i,i,0}) + C_4^{i-1}\beta_{0,1}(b^{(1)}_{5-i,i,0} \\ &\quad - b^{(1)}_{6-i,i-1,0})\big]u_0^{5-i}u_1^i, \\ (\alpha_{0,2}u_0+\beta_{0,2}u_1)D_{0,2}P_1(T) &= 5\sum_{i=0}^{5}\big[C_4^i\alpha_{0,2}(b^{(1)}_{4-i,i,1}-b^{(1)}_{5-i,i,0}) \\ &\quad + C_4^{i-1}\beta_{0,2}(b^{(1)}_{5-i,i-1,1}-b^{(1)}_{6-i,i-1,0})\big]u_0^{5-i}u_1^i, \\ (\alpha_{0,3}u_0+\beta_{0,3}u_1)D_{0,3}P_2(T) &= 5\sum_{i=0}^{5}\big[C_4^i\alpha_{0,3}(b^{(2)}_{4-i,i,1}-b^{(1)}_{5-i,i,0}) \\ &\quad + C_4^{i-1}\beta_{0,3}(b^{(1)}_{5-i,i-1,1}-b^{(1)}_{6-i,i-1,0})\big]u_0^{5-i}u_1^i,\end{aligned}$$

其中 $C_4^{-1}=C_4^5=0$. 从而(2.3)和(2.5)等价于

$$\begin{cases} b^{(1)}_{i,j,0} = b^{(2)}_{i,j,0},\ i+j=5, & (2.6) \\ C_4^i(\alpha_{0,1}A_i+\alpha_{0,2}B_i+\alpha_{0,3}C_i) + C_4^{i-1}(\beta_{0,1}A_{i-1}+\beta_{0,2}B_{i-1}+\beta_{0,3}C_{i-1}) = 0,\ 0\leqslant i\leqslant 5, & (2.7) \end{cases}$$

其中 $A_i=b^{(1)}_{4-i,i+1,0}-b^{(1)}_{5-i,i,0}$, $B_i=b^{(1)}_{4-i,i,1}-b^{(1)}_{5-i,i,0}$, $C_i=b^{(2)}_{4-i,i,1}-b^{(2)}_{5-i,i,0}$.

我们将(2.6)和(2.7)记为

$$DX = 0, \tag{2.8}$$

其中 $X=(A_0^T,B_0^T,C_0^T,\cdots,A_4^T,B_4^T,C_4^T)^T$，$X^T$ 代表 X 的转置，

$$D=\begin{bmatrix} \alpha_{0,1} & \alpha_{0,2} & \alpha_{0,3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_{0,1} & \beta_{0,2} & \beta_{0,3} & 4\alpha_{0,1} & 4\alpha_{0,2} & 4\alpha_{0,3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4\beta_{0,1} & 4\beta_{0,2} & 4\beta_{0,3} & 6\alpha_{0,1} & 6\alpha_{0,2} & 6\alpha_{0,3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6\beta_{0,1} & 6\beta_{0,2} & 6\beta_{0,3} & 4\alpha_{0,1} & 4\alpha_{0,2} & 4\alpha_{0,3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4\beta_{0,1} & 4\beta_{0,2} & 4\beta_{0,3} & \alpha_{0,1} & \alpha_{0,2} & \alpha_{0,3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_{0,1} & \beta_{0,2} & \beta_{0,3} \end{bmatrix}$$

$$= (D_1^T, D_2^T, D_3^T, \cdots, D_6^T)^T.$$

如果存在常数 $R\neq 0$，使得 $(\beta_{0,1},\beta_{0,2},\beta_{0,3})=-R(\alpha_{0,1},\alpha_{0,2},\alpha_{0,3})$. 则 $(\sum_{i=1}^{6}R^{6-i}D_i)X\equiv 0$，所以(2.8)式等价于

$$D_iX = 0,\ 1\leqslant i\leqslant 6,\ i\neq 4. \tag{2.9}$$

由 $\alpha_{0,3}$ 的几何意义，知 $\alpha_{0,3}\neq 0$. 从而由 $D_3X=0$，得

$$C_2 = -\frac{1}{\alpha_{0,3}}(\alpha_{0,1}A_2 + \alpha_{0,2}B_2 + \frac{2}{3}(\beta_{0,1}A_1 + \beta_{0,2}B_1 + \beta_{0,3}C_1)). \tag{2.10}$$

如果 $J=\alpha_{0,2}\beta_{0,3}-\alpha_{0,3}\beta_{0,2}\neq 0$，由 $D_3X=0$ 和 $D_4X=0$，得

$$\begin{aligned} B_2 = &-\frac{1}{J}((\alpha_{0,1}\beta_{0,3} - \alpha_{0,3}\beta_{0,1})A_2 + \frac{2}{3}(\beta_{0,3}(\beta_{0,1}A_1 + \beta_{0,2}B_1 + \beta_{0,3}C_1) \\ &- \alpha_{0,3}(\alpha_{0,1}A_3 + \alpha_{0,2}B_3 + \alpha_{0,3}C_3))), \\ C_2 = &-\frac{1}{J}((\alpha_{0,2}\beta_{0,1} - \alpha_{0,1}\beta_{0,2})A_2 + \frac{2}{3}(\alpha_{0,2}(\alpha_{0,1}A_3 + \alpha_{0,2}B_3 + \alpha_{0,3}C_3) \\ &- \beta_{0,2}(\beta_{0,1}A_1 + \beta_{0,2}B_1 + \alpha_{0,3}C_1))), \end{aligned}$$

从而

$$b^{(1)}_{2,2,1} = B_2 + b^{(1)}_{3,2,0}, \quad b^{(2)}_{2,2,1} = C_2 + b^{(2)}_{3,2,0} = C_2 + b^{(1)}_{3,2,0}. \tag{2.11}$$

设 T_0 是 Δ 中的网点，$R(T_0)$ 是关于 T_0 的关联三角网络. 记 $\{T_i\}_{i=1}^{n}$ 是 $R(T_0)$ 中除 T_0 外的所有网点(见图 2.1)，又设 $P_m(u_0^{(m)},u_1^{(m)},u_2^{(m)}) = \sum\limits_{i+j+k=5} b^{(m)}_{i,j,k}B^5_{i,j,k}(u_0^{(m)},u_1^{(m)},u_2^{(m)})$ 是定义在三角形 $V_m=V[T_0,T_m,T_{m+1}]$ 上的三角片，$1\leqslant m\leqslant n$，其中 $T_{n+1}=T_1$.

由(2.3)式，可得

$$b^{(m)}_{i,j,0} = b^{(m-1)}_{i,0,j} := b_{m,j}, \quad i+j=5, \tag{2.12}$$

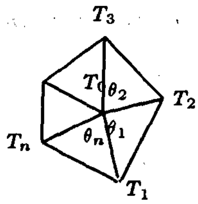

图 2.1

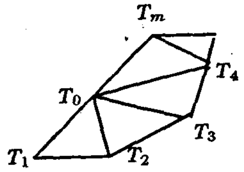

图 2.2

特别地，可得

$$b^{(1)}_{5,0,0} = b^{(2)}_{5,0,0} = \cdots = b^{(n)}_{5,0,0} := b_0, \tag{2.13}$$

由(2.5)式，知当(2.12)式和下式

$$(\alpha_i u_0+\bar{\alpha}_i u_i)D_{0,i}P_i(T)+(\beta_i u_0+\bar{\beta}_i u_i)D_{0,i}P_i(T)+(\gamma_i u_0+\bar{\gamma}_i u_i)D_{0,i-1}P_{i-1}(T)=0, \quad 1\leqslant i\leqslant n, \tag{2.14}$$

成立时，$P_i(T)$ 之间 GC^1 光滑连接，其中 $(u_0 u_i)$ 是 T 关于 T_0T_i 的面积坐标.

类似(2.7)和(2.8)式，可得

$$H_iX_i = 0, \tag{2.15}$$

其中 $X_i=((b^{(i)}_{4,0,1}-b^{(i)}_{5,0,0})^T,(b^{(i)}_{4,1,0}-b^{(i)}_{5,0,0})^T,(b^{(i-1)}_{4,1,0}-b^{(i-1)}_{5,0,0})^T,\cdots,(b^{(i)}_{0,4,1},b^{(i)}_{1,4,0})^T,(b^{(i)}_{0,5,0}-b^{(i)}_{1,4,0})^T,(b^{(i-1)}_{0,1,4}-b^{(i-1)}_{1,4,0})^T)^T$,

$$H_i = \begin{bmatrix} \alpha_i & \beta_i & \gamma_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{\alpha}_i & \bar{\beta}_i & \bar{\gamma}_i & 4\alpha_i & 4\beta_i & 4\gamma_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4\bar{\alpha}_i & 4\bar{\beta}_i & 4\bar{\gamma}_i & 6\alpha_i & 6\beta_i & 6\gamma_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6\bar{\alpha}_i & 6\bar{\beta}_i & 6\bar{\gamma}_i & 4\alpha_i & 4\beta_i & 4\gamma_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4\bar{\alpha}_i & 4\bar{\beta}_i & 4\bar{\gamma}_i & \alpha_i & \beta_i & \gamma_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{\alpha}_i & \bar{\beta}_i & \bar{\gamma}_i \end{bmatrix} := (H^T_{i,1},H^T_{i,2},\cdots,H^T_{i,6})^T,$$

由 $H_{i,1}X=0$，即

$$\alpha_i(b_{i+1,1}-b_0)+\beta_i(b_{i,1}-b_0)+\gamma_i(b_{i-1,1}-b_0)=0, \tag{2.16}$$

可以看出，$\alpha_i,\beta_i,\gamma_i$ 可取为

$$\alpha_i=\frac{1}{L_{i+1}\sin\theta_i},\ \beta_i=\frac{-\sin(\theta_i+\theta_{i-1})}{L_i\sin\theta_i\sin\theta_{i-1}},\ \gamma_i=\frac{1}{L_{i-1}\sin\theta_{i-1}}, \tag{2.16$'$}$$

其中 $L_i=|b_{i,1}-b_0|$，θ_i 为 $b_{i,1}-b_0$ 与 $b_{i+1}-b_0$ 之间的夹角.

如果 $(\alpha_i,\beta_i,\gamma_i)$ 和 $(\bar{\alpha}_i,\bar{\beta}_i,\bar{\gamma}_i)$ 不和原点共线，且存在 $R\neq 0$ 使得 $(\bar{\alpha}_i,\bar{\gamma}_i)+R(\alpha_i,\gamma_i)=0$，由 $\sum_{j=1}^{6}R^{6-j}H_{i,j}X=0$，得

$$\bar{\bar{\beta}}\sum_{j=1}^{5}R^{5-j}(b^{(i)}_{5-j,j,0}-b^{(i)}_{6-j,j,0})=0, \tag{2.17}$$

其中 $\bar{\bar{\beta}}=\bar{\beta}+R\bar{\alpha}\neq 0$（否则 $(\alpha_i,\beta_i,\gamma_i)$，$(\bar{\alpha}_i,\bar{\beta}_i,\bar{\gamma}_i)$ 和原点共线).

从(2.17)知 $R\neq 1$，否则有 $b^{(i)}_{0,5,0}-b^{(i)}_{5,0,0}=0$，这显然是不可能的. 从而得

$$-R^4b^{(i)}_{5,0,0}+R^3(R-1)b^{(i)}_{4,1,0}+R^2(R-1)b^{(i)}_{3,2,0}+R(R-1)b^{(i)}_{2,3,0}$$
$$+(R-1)b^{(i)}_{1,4,0}+b^{(i)}_{0,5,0}=0. \tag{2.18}$$

又由 $H_{i,2}X=0$，得

$$\alpha_ib^{(i)}_{3,1,1}+\beta^{(i)}_{3,2,0}+\gamma_ib^{(i)}_{3,1,1}+\bar{\alpha}_i(b_{i+1,1}-b_0)+\bar{\beta}_i(b_{i,1}-b_0)$$
$$+\bar{\gamma}_i(b_{i-1,1}-b_0)-(\alpha_i+\beta_i+\gamma_i)b_{i,1}=0,$$

如果简记 $b^{(i)}_{3,1,1}=e_i$，$d_i=\bar{\alpha}_i(b_{i+1,1}-b_0)+\bar{\beta}_i(b_{i,1}-b_0)+\bar{\gamma}_i(b_{i-1,1}-b_0)-(\alpha_i+\beta_i+\gamma_i)b_{i,1}$，则得

$$\alpha_ie_i+\gamma_ie_{i-1}+\beta_ib_{i,2}+d_i=0,\quad 1\leqslant i\leqslant n. \tag{2.19}$$

当 n 为奇数时，由(2.19)可得

$$e_i=-\frac{1}{2}L_iL_{i+1}\sin\theta_i\sum_{j=1}^{n}\frac{(-1)^{j-1}}{L_j}(d_j+\beta_jb_{j,2}), \tag{2.20}$$

若 n 为偶数，则方程组(2.19)与下面方程组等价.

$$(**)\qquad\begin{cases}e_{i-1}=-\dfrac{1}{\gamma_i}(\alpha_ie_i+\beta_ib_{i,2}+d_i),\ i=n,n-1,\cdots,2,\\[2mm] \displaystyle\sum_{j=1}^{n}\frac{(-1)^{j-1}}{L_j}(d_j+\beta_jb_{j,2})=0.\end{cases}$$

由以上讨论，我们可如下构造五次 GC^1 插值位置向量的格式.

设 T_0 是三角网格中的网点，$T_1,T_2,\cdots T_n$ 是 $R(T_0)$ 中除 T_0 外的网点（见图 2.1）；b_0 是于 T_0 点给定的位置向量；在过 T_0 的某一平面中按序选取 $b_{i,1}$（$b_{i,1}-b_0$ 介于 $b_{i+1,1}-b_0$ 与 $b_{i-1,1}-b_0$ 之间），并按(2.16)和(2.16)$'$式确定 $\alpha_i,\beta_i,\gamma_i$.

I. Δ 中不含内网点

设 $T_0,T_1,T_2,\cdots,T_m$ 是 Δ 的所有网点（如图 2.2）. 在每条内网线 T_0T_i 上建立类似(2.14)的方程. 如果存在实常数 R，使得 $(\bar{\alpha}_i,\bar{\beta}_i,\bar{\gamma}_i)=-R(\alpha_i,\beta_i,\gamma_i)$，则 $b_{i,2}(=b^{(i)}_{3,2,0})$ 任意选取；选取 $b^{(i)}_{2,2,1}$ 和 $b^{(i)}_{2,2,1}$ 使得它们满足下式

$$\alpha_ib^{(i)}_{2,2,1}+\gamma_ib^{(i-1)}_{2,1,2}=-\beta_i(b_{i,3}-b_{i,2})+(\alpha_i+\gamma_i)b_{i,2}-\frac{2}{3}(\bar{\alpha}_i(b^{(i)}_{3,1,1}-b_{i,1}$$
$$+\bar{\beta}_i(b_{i,2}-b_{i,1}+\bar{\gamma}_i(b^{(i-1)}_{3,1,1}-b_{i,1})) \tag{2.21}$$

如果 $\alpha_i\gamma_i-\bar{\alpha}_i\gamma_i\neq 0$，则 $b_{i,2}$ 任意选取，$b_{2,2,1}^{(i)}$ 和 $b_{2,1,2}^{(i-1)}$ 由(2.11)式确定．如果 $(\alpha_i,\beta_i,\gamma_i)$，$(\bar{\alpha}_i,\bar{\beta}_i,\bar{\gamma}_i)$ 和原点有共线，且 $\alpha_i\bar{\gamma}_i-\bar{\alpha}_i\gamma_i=0$，则选取 $b_{2,2,1}^{(i)}$ 和 $b_{2,1,2}^{(i-1)}$ 满足(2.21)式，$b_{i,2}$ 满足(2.18)式(也可 $b_{i,2}$ 和 $b_{i,3}$ 同时考虑，使它们满足(2.18)式)，诸 $b_{3,1,1}^{(i)}$ 满足方程给(2.19)式(或(＊＊)中的第一式)．

Ⅰ．Δ中只含有一个内网点

设 T_0 是 Δ 中的内网点，$T_1,T_2,\cdots,T_n$ 是边界网点(如图 2.1)．

1)　n 是奇数．此时 $b_{i,2}$ 可任意选取，$b_{3,1,1}^{(i)}$ 由(2.20)式确定，如果存在实常数 R 使得

$$(\bar{\alpha}_i,\bar{\beta}_i,\bar{\gamma}_i)=-R(\alpha_i,\beta_i,\gamma_i),\tag{2.22}$$

则选取 $b_{2,2,1}^{(i)}$ 和 $b_{2,1,2}^{(i-1)}$ 使它们满足(2.21)式．$b_{i,3}(=b_{2,3,0}^{(i)})$ 任选．如果(2.22)式不成立，但 $\alpha_i\bar{\gamma}_i-\bar{\alpha}_i\gamma_i\neq 0$，则 $b_{2,2,1}^{(i)}$ 和 $b_{2,1,2}^{(i-1)}$ 由(2.11)式确定，$b_{i,3}$ 任选．若(2.22)式不成立，且 $\alpha_i\bar{\gamma}_i-\bar{\gamma}_i\gamma_i=0$，则 $b_{2,2,1}^{(i)}$ 和 $b_{2,1,2}^{(i-1)}$ 由(2.21)式确定．$b_{i,3}$ 由(2.18)式确定．

2)　n 是偶数．此时选取 $b_{i,2}$ 和 $b_{3,1,1}^{(i)}$ 满足方程组(＊＊)．若(2.22)式成立，选取 $b_{2,2,1}^{(i)}$ 和 $b_{2,1,2}^{(i-1)}$ 满足(2.21)式，$b_{i,3}$ 任意选取．若(2.22)式不成立，但 $\alpha_i\bar{\gamma}_i-\bar{\alpha}_i\gamma_i\neq 0$，则 $b_{2,2,1}^{(i)}$ 和 $b_{2,1,2}^{(i-1)}$ 由(2.11)式确定，$b_{i,3}$ 任选．若(2.22)式不成立，且 $\alpha_i\bar{\gamma}_i-\bar{\gamma}_i\gamma_i=0$，则 $b_{2,2,1}^{(i)}$ 和 $b_{2,1,2}^{(i-1)}$ 由(2.21)式确定，$b_{i,3}$ 由(2.18)式确定．

Ⅱ．Δ中至少包含两个相邻的内网点

设 T_0 是 Δ 中的内网点，$T_1,T_2,\cdots,T_n$ 是 $R(T_0)$ 中除 T_0 外的网点，且至少有一个内网点，不妨设为 T_1．与前面一样，记 T_0 点处的位置向量为 b_0，并在某一过 b_0 的平面上按序选取 $b_{i,1}(=b_{4,1,0}^{(i)})$，然后由(2.16)式及(2.16)′式确定 $\alpha_i,\beta_i,\gamma_i$．

1．　n 为奇数．首先 $b_{3,1,1}^{(i)}$ 由(2.20)式确定．若(2.22)式成立，则选取 $b_{2,2,1}^{(i)}$ 和 $b_{2,1,2}^{(i-1)}$ 满足(2.21)式，$b_{1,2}$ 任取；若(2.22)式不成立，但 $\alpha_i\bar{\gamma}_i-\bar{\alpha}_i\gamma_i\neq 0$，则 $b_{2,2,1}^{(i)}$ 和 $b_{2,1,2}^{(i-1)}$ 由(2.11)式确定，$b_{i,2}$ 任选；若(2.22)式不成立，且 $\alpha_i\bar{\gamma}_i-\bar{\gamma}_i\gamma_i=0$，则取 $b_{2,2,1}^{(i)}$ 和 $b_{2,1,2}^{(i-1)}$ 满足(2.21)式，$b_{i,2}b_{i,3}$ 满足(2.18)式．

2．　n 是偶数．设在 T_i 点处网线 T_0T_i，T_{i-1} 和 $T_{i+1}T_i$ 上对应于 $b_{i,1}$ 的向量分别为 $\bar{b}_{i,2}$，$\bar{b}_{i,1}$ 和 $\bar{b}_{i,3}$，并设 T_i 处的位置向量为 $\bar{b}_i$，$\bar{b}_{i,1}-\bar{b}_i$ 与 $\bar{b}_{i,2}-\bar{b}_i$ 之间的夹角为 $\bar{\theta}_{i,1}$，$\bar{b}_{i,2}-\bar{b}_i$ 与 $\bar{b}_{i,3}-\bar{b}_i$ 之间的夹角为 $\bar{\theta}_{i,2}$(显然 $\bar{b}_{i,1}-\bar{b}_i$，$\bar{b}_{i,2}-\bar{b}_i$ 和 $\bar{b}_{i,2}-\bar{b}_i$，$\bar{b}_{i,3}-\bar{b}_i$ 共面)．

①　若对每一个 $1\leqslant i\leqslant n$，或 $\theta_{i-1}-\theta_i=\pi(=180°)$ 或 $\bar{\theta}_{i,1}+\bar{\theta}_{i,2}=\pi$，或 T_i 是一个边界网点，则对固定的 i，不失一般性，设 $\theta_{i-1}+\theta_i=\pi$．若(2.22)式成立，则 $b_{i,2}$ 任选，$b_{3,2,1}^{(i)}$ 和 $b_{2,1,2}^{(i-1)}$ 满足(2.21)式；若(2.22)式不成立，但 $\alpha_i\bar{\gamma}_i-\bar{\alpha}_i\gamma_i\neq 0$，则 $b_{i,2}$ 任选，$b_{2,2,1}^{(i)}$ 和 $b_{2,1,2}^{(i-1)}$ 由(2.11)式确定；若(2.22)式不成立，且 $\alpha_i\bar{\gamma}_i-\bar{\gamma}_i\gamma_i=0$，则选取 $b_{2,2,1}^{(i)}$ 和 $b_{2,1,2}^{(i-1)}$ 满足(2.21)式，$b_{i,2}$ 由(2.18)式确定；而 $b_{3,1,1}^{(i)}$ 和满足 $\theta_{i-1}+\theta_i\neq\pi$ 的 $b_{i,2}$ 由(＊＊)式确定．

②　若存在 i，使得 $\theta_{i-1}+\theta_i\neq\pi$，$\bar{\theta}_{i,1}+\bar{\theta}_{i,2}\neq\pi$．且 T_i 是一个内网点，不妨设 $i=1$．并对 α_1,γ_1，$\bar{\alpha}_1$ 和 $\bar{\gamma}_1$ 做点限制，要求

$$\alpha_1\bar{\gamma}_1-\bar{\alpha}_1\gamma_1\neq 0\tag{2.23}$$

从而 $b_{2,2,1}^{(1)}$ 和 $b_{2,1,2}^{(n)}$ 可由(2.11)式确定．由于 $\sin(\theta_1+\theta_n)\neq 0$，从而 $b_{i,2}(2\leqslant i\leqslant n)$ 可待定，而 $b_{1,2}$ 由(＊＊)中的第二式确定．诸 $b_{3,1,1}^{(i)}$ 由(＊＊)中的第一式确定．对 $2\leqslant i\leqslant n$，如果(2.22)式成立，则选取 $b_{2,2,1}^{(i)}$ 和 $b_{2,1,2}^{(i-1)}$ 满足(2.21)式．$b_{i,2}$ 任意选取；如果(2.22)式不成立，但 $\alpha_i\bar{\gamma}_i-\bar{\alpha}_i\gamma_i\neq 0$，则 $b_{2,2,1}^{(i)}$ 和 $b_{2,1,2}^{(i-1)}$ 由(2.11)式确定，$b_{i,2}$ 任选；如果(2.22)式不成立，且 $\alpha_i\bar{\gamma}_i-\bar{\gamma}_i\gamma_i=0$，则选取 $b_{2,2,1}^{(i)}$ 和 $b_{2,1,2}^{(i-1)}$ 满足(2.21)式，而 $b_{i,2}$ 由(2.18)式确定($b_{i,3}$ 待定)，而对 T_1 点，如果过 T_1 的网线个数为奇数，则

对它进行第Ⅲ种情况的第一种处理；如果过 T_1 的网线个数为偶数，则对它进行第Ⅲ种情况的第二种处理．这样对三仍网格 $R(T_0)\cup R(T_1)$，除在 T_0T_1 做了 $a_i\bar{\gamma}_i-\bar{a}_i\gamma_i\neq 0$ 的限制外，在其它网线上并不需要做任何限制．

我们再看一下(2.23)式的几何意义．

设分别有 n 和 m 条网线以 T_0 和 T_1 为一端点，$\bar{T}_1=T_0,\bar{T}_2=T_2,\bar{T}_3,\bar{T}_4\cdots,\bar{T}_m=T_n$ 是过 T_1 点的所有网线；$\bar{b}_{i,1}$ 为对应 $T_1\bar{T}_i$ 类似 $b_{i,1}$ 的向量．经过简单的计算，(2.23)等价于

$$S_2\bar{S}_m-\bar{S}_2S_n\neq 0, \tag{2.24}$$

其中 S_i 是点 $b_0,b_{1,1}$ 和 $b_{i,1}$ 所确定的三角形的面积($i=2,n$)，$\bar{S}_2$ 和 $\bar{S}_m$ 的意义类似，由上面的讨论知道，只有在 n 和 m 都是偶数时，$\{b_{i,1}\}_{i=1}^n$和$\{\bar{b}_{i,1}\}_{i=1}^m$才需加上限制(2.24)，而这显然是很容易办到的．而在 $R(T_0)\cup R(T_1)$ 中其它内网线(除 T_0T_1)不需要加限制，就是说诸$\{b_{i,1}\}_{i=1}^n$和$\{\bar{b}_{i,1}\}_{i=1}^m$最多需要加上限制(2.24)．

如果过网点 $T\in\Delta$ 的所有网线记为 $T(T)$，并记 $\Delta_1=\Delta\backslash\bar{\Delta},\bar{\Delta}:=\{T_0,T_1\}\cup T(T_0)\cup T(T_1)$，则对 Δ_1 中的网点和网线继续进行第Ⅲ种处理，得到 $\Delta_2,\Delta_3\cdots$，等等，直到对某个 n，在 Δ_n 中不再含有相邻的内网点．然后对 Δ_n 进行第Ⅰ种和第Ⅱ种处理，直到将全部网点和网线处理完毕．

如果得到的格式，显然插值给定的位置向量，并且以给定的(过位置向量的)平面为切平面．

参 考 文 献

[1] 刘鼎元，Bézier 曲面片光滑连接的几何条件，应用数学学报，Vol. 9，No. 4.

[2] R. E. Barnhill, Surfaces in computer aided geometric design: A survey with new results, CAGD 2(1985), 1－17.

[3] G. Farin(1983), Smooth interpolation to scattered 30 data. in: R. E. Barnhill and W. Boehm. eds. Surfaces in Computer Aided Geometric Design. North — Holland Amsterdam.

The GC' Quintic Interpolant on Arbitrary Triangular Mesh

Shi Xiquan

(Inst. Math. Science, Dalian University of Technology, Dalin)

Wang Tianjun

(Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 703 CAD\CAM Group)

Abstract

A kind of GC' surface constructing scheme on arbitrary triangular mesh is presented. The surface formed by this scheme can pass the given position vectors and take the given planes as its tangent planes at the vertices of the triangular mesh. Triangular mesh referred here is a set of space triangles and their faces such that the intersection of any two edges in this set is a vertex or an empty set.