第12卷第4期 1992年11月 数学研究与评论 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Vol. 12 No. 4 Nov. 1992

关于一类指数函数组合之复合分解*

金家梁 常建明
(常熟高等专科学校,215500)

摘 要

本文讨论了一类指数函数组合在复合意义下的分解.这一类指数函数组合中作为指数的多项式可以具有相同的次数.

§1 引 言

设$F(z)$为开平面上的亚纯函数,若可表示为

$$F(z)=f\circ g(z)\ (=f(g(z))),\tag{1}$$

其中g为整函数,f为亚纯函数(当f为有理函数时,g可为亚纯函数),则称(1)式为F的一个分解,f和g分别称为F的左因子和右因子.

如果F的任何形如(1)的分解都只能以f或g为(分式)线性函数的形式出现,则称F是素的.如果F的任何形如(1)的分解都只能以g为多项式或f为有理函数的形式出现,则称F是拟素的,又若在F的分解形式(1)中,每当f为超越函数时,g只能为线性多项式,则称F是右素的.同理可定义左素.

另外,如果对整函数我们只考虑它的整函数左右因子,则类似上面我们可定义E—素,E—拟素,E—右素,E—左素等(参见[1]).

关于指数函数组合的分解问题在作为指数的多项式的次数有两个或两个以上相同的时候是比较困难的[2],[2]中指出可以证明函数$e^{z^2}+ze^{2z^2}$是素的,进一步地[3]中证明了一类函数$ze^{az^k}+ze^{z^k}+P(z)$(其中a为正实数,$0<a<1$,k为自然数,P为多项式)是素的.本文之主要工作即是在此基础上证明更广一类函数的右素性.

2. 若 干 引 理

引理1[4] 设$F(z)=\sum_{j=1}^{m}Q_j(z)e^{P_j(z)}$,其中$Q_j(z)$为有理函数,$P_j(z)$为多项式,则$F(z)$是拟素的.

引理2[5] 设$a_0(z),\cdots,a_n(z)$为$n+1$个级都不超过ρ的整函数,又设$g_1(z),\cdots,g_n(z)$为整

* 1990年10月18日收到.

函数，满足 $g_i-g_j(i\neq j)$ 为超越整函数或次数高于 ρ 的多项式，则等式 $\sum_{j=1}^{n}a_j(z)e^{g_j(z)}=a_0(z)$，仅当 $a_0(z)=a_1(z)=\cdots=a_n(z)=0$ 时才能成立.

引理 3 设 $\eta_j(j=1,\cdots,n)$ 为 n 个不同的 n 次单位根，$\eta_1=1$，k,r 为正整数且 $r\geqslant 2$，$\lambda_1(=1),\lambda_2,\cdots,\lambda_r$ 互不相等且 $|\lambda_s|\leqslant 1$，$s=1,\cdots,r$，若对任何的 j，$j=1,\cdots,n$，下列数中

$$\lambda_1\eta_j^k-1,\ \lambda_1\eta_j^k-1,\cdots,\ \lambda_r\eta_j^k-1$$

必有一数为零，则或者 $\frac{k}{n}$ 为整数，或者存在一数 $\bar{r}\in\{z,\cdots,r\}$ 使 $\frac{\bar{r}k}{n}$ 为整数，但 $\frac{lk}{n}(0<l<\bar{r})$ 非整数，且 $a_1,\cdots,a_r$ 中某 $\bar{r}$ 个是 $\bar{r}$ 次不同的单位根它们的例数之集合等同于集合 $\{\eta_1^k,\cdots,\eta_n^k\}$.

引理 3 的证明很简单，略.

引理 4 若 $F(z)$ 是非周期的超越整函数，则 F 是右素的，当且仅当 F 是 E—右素的.

引理 4 的证明可参阅[6].

3. 主 要 结 果

定理 1 若一组互不相等的非零复数 $\lambda_1,\cdots,\lambda_r$ 中任何两个或两个以上的数之和均不为 0，则形如

$$F(z)=Q_0+\sum_{s=1}^{r}Q_se^{a_sP}$$

的函数是右素的. 除非 $Q_i(i=0,\cdots,r)$，P 具有公共右因子，其中 $Q_i(i=0,\cdots,r)$，P 均为多项式.

定理 2 若一组互不相等的非零复数 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 可分成若干组，使每组之和为零，但每组中任何两个或两个以上之数之和均非零. 设每组数的个数分别为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$，即 $r=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m$. 设 α 为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 的最大公约数. 则形如定理 1 中所选函数 $F(z)$ 的右因子是 $Q_i(i=0,1,\cdots,r)$ 与 P 的公共右因子，或是此公共右因子的 β 次方，β 是 α 的一个约数.

定理 3 设 $F_s(z)=Q_{0s}+\sum_{i=1}^{r_s}Q_{is}e^{a_{is}P_s}$，$s=1,\cdots,m$，其中 $Q_{0s},Q_{is}(\neq 0)$，$P_s(\neq c)$ 为多项式. $\lambda_{is}(i=1,\cdots,r_s)$ 为互不相等之非零复数，若 $\deg P_1<\deg P_2<\cdots<\deg P_m$ 则 $F(z)=F_1(z)+F_2(z)+\cdots+F_m(z)$ 是右素的. 除非 $F_1(z),F_2(z),\cdots,F_m(z)$ 具有公共右因子.

4. 定 理 的 证 明

定理 1 的证明 显然可不妨设 $\lambda_1=1$，且 $|\lambda_s|\leqslant 1$，$s=1,\cdots r$，由引理 1 知 $F(z)$ 是拟素的. 下面考察它的 E—右素性. 设 $F=f\circ g(z)$ 其中 f 为超越整函数，g 为多项式. 设

$$\omega=g(z)=a_0(z)+a_1z+\cdots+a_nz^n\ (a_n\neq 0,n>1).$$

对于充分大的 $|\omega|$（以下出现的 ω 都假定其模充分大）有

$$g(z)-\omega=a_n(z-z_1(\omega))\cdots(z-z_n(\omega)),$$

其中 $z_j(\omega)$，$j=1,\cdots,n$，为 n 个不同的分支（因显见 $R(z,\omega)=g(z)-\omega$ 关于 z 为不可约），在 $\omega=\infty$ 的某邻域内有

$$z_j(\omega)=\omega_j^{\frac{1}{n}}(b_0+b_{-1}\omega_j^{-\frac{1}{n}}+\cdots),\ j=1,2,\cdots n.$$

其中 $\omega_1^{\frac{1}{n}}$ 是 $\omega^{\frac{1}{n}}$ 的一个固定分支，而 $\omega_j^{\frac{1}{n}}=\eta_j\omega_1^{\frac{1}{n}}$，$\eta_j(j=1,\cdots n)$ 为 n 个不同的 n 次单位根，$\eta_1=1$，易见 $F(z_j(\omega))=f(\omega)$. 设

$$E_j(\omega)=F(z_j(\omega))=Q_0(z_j(\omega))+\sum_{s=1}^{n}Q_s(z_j(\omega)e^{\lambda_s P(z_j(\omega))},$$

则对 $j=1,2,\cdots,n$，有 $E_j(\omega)/E_1(\omega)=1$ 或

$$V_j(\omega)/V_1(\omega)=1 \tag{2}$$

其中

$$V_j(\omega)=E_j(\omega)/[Q_1(z_1(\omega)e^{P(z_1(\omega))}]=\frac{Q_0(z_j)}{Q_1(z_1)}e^{-P(z_1)}+\frac{Q_1(z_j)}{Q_1(z_1)}e^{P(z_j)-P(z_1)}+\sum_{s=2}^{r}\frac{Q_s(z_j)}{Q_1(z_1)}e^{\lambda_s P(z_j)-P(z_1)}$$

特别地有

$$V_1(\omega)=1+\frac{Q_0(z_1)}{Q_1(z_1)}e^{P(z_1)}+\sum_{s=2}^{r}\frac{Q_s(z_1)}{Q_1(z_1)}e^{(\lambda_s-1)P(z_1)},$$

及 $\deg P=k$，则可证

$$P(z_j)=d_k\omega_j^{\frac{k}{n}}+d_{k-1}\omega_j^{\frac{k-1}{n}}+\cdots+d_0+d_{-1}\omega_j^{-\frac{1}{n}}+\cdots, \tag{3}$$

其中 $d_k=P_kb_0^k\neq 0$，P_k 为 P 的首项系数.

以下我们将证明：若 $d_l\neq 0(0<l\leqslant k)$ 则 $\frac{l}{n}$ 为整数. 为此在 ω—平面上取条趋于∞的直线 $\mathscr{L}$，使得在 $\mathscr{L}$ 上有

$$d_k\omega_1^{\frac{k}{n}}=|d_k\omega_1^{\frac{k}{n}}|.$$

由于 $d_k\neq 0$，故先证明 $\frac{k}{n}$ 为整数. 若不然，即 $\frac{k}{n}$ 非整数. 则由于

$$P(z_j)-P(z_1)=d_k(\eta_j^k-1)\omega_1^{\frac{k}{n}}+d_{k-1}(\eta_j^{k-1}-1)\omega_1^{\frac{k-1}{n}}+\cdots,$$

$$\lambda_sP(z_j)-P(z_1)=d_k(\lambda_s\eta_j^k-1)\omega_1^{\frac{k}{n}}+d_{k-1}(\lambda_s\eta_j^{k-1}-1)\omega_1^{\frac{k-1}{n}}+\cdots,s=2,\cdots r.$$

由引理 3 知

$$\eta_j^k-1\neq 0,\ \lambda_s\eta_j^k-1\neq 0\ (j\neq 1),\ s=2,\cdots r.$$

故 $\mathrm{Re}(\eta_j^k-1)<0$，$\mathrm{Re}(\lambda_s\eta_j^k-1)<0$ $(j\neq 1)$ $s=2,\cdots r$，从而在 $\mathscr{L}$ 上有 $V_j(\omega)\to 0$ $(\omega\to 0,\omega\in\mathscr{L},\ j>1)$. 但易见 $V_1\to 1$ $(\omega\to\infty,\omega\in\mathscr{L},)$，与(2)得出矛盾. 故 $\frac{k}{n}$ 必为整数，这说明 $\eta_j^k=1$，从而 $\mathrm{Re}(\lambda_s\eta_j^k-1)=\mathrm{Re}(\lambda_s-1)<0$ 从而

$$\sum_{s=2}^{r}\frac{Q_s(z_j)}{Q_1(z_1)}e^{\lambda_s(P(z_j)-P(z_1)}\to 0\ (\omega\in\mathscr{L},\omega\to\infty).$$

接着我们再来证：若 $d_l\neq 0$，$0<l<k$，则 $\frac{l}{n}$ 为整数，否则设 $d_{l_v}\neq 0$，$0<l_v<k$，$v=1,2,\cdots m$，而 $\frac{l_v}{n}$ 非整数，则

$$P(z_j)-P(z_1)=d_{l_m}(\eta_j^{l_m}-1)\omega_1^{\frac{l_m}{n}}+\cdots+d_{l_1}(\eta_j^{l_1}-1)\omega_1^{\frac{l_1}{n}}+d_{-1}(\eta_j^{-1}-1)\omega_1^{-\frac{1}{n}}+\cdots.$$

由上面讨论可知必有

$$\mathrm{Re}\{d_{l_m}(\eta_j^{l_m}-1)\omega_1^{\frac{l_m}{n}}=0.$$

否则易知 $V_j\to 0$ 或 $V_j\to\infty$ 与 $V_1\to 1$ 及(2)式相矛盾，故有

$$d_{l_m}(\eta_j^{l_m}-1)\omega_1^{\frac{l_m}{n}}=\pm i|d_{l_m}(\eta_j^{l_m}-1)\omega_1^{\frac{l_m}{n}}|.$$

同理将上式之下标 m 换成 v 时，上式仍成立. 于是由(2)式知有

$$\eta_j^{\deg Q_1}\exp\{i\sum_{v=1}^{n}\delta_v|\eta_j^{l_v}-1)d_{l_v}\omega_1^{\frac{l_v}{n}}|\}\to 1,$$

其中 $\delta_v=\pm 1$, $v=1,\cdots,m$, 记 $\eta_j^{\deg Q_1}=e^{i\theta_0}$. 由于上式指数记号由函数是 $|\omega|$ 的连续函数，故应有

$$\theta_0+\sum_{v=1}^{m}\delta_v|(\eta_j^{l_v}-1)d_{l_v}\omega_1^{\frac{l_v}{n}}|=2q\pi\ (q \text{ 为整数}).$$

但这是不可能的，于是我们证明了：若 $d_{l_v}\neq 0$ 则 $\frac{l_v}{n}$ 为整数. 或者说，若 $\frac{l}{n}$ 为非整数，$0<l<k$，则 $d_l=0$，从而存在一个多项式 h 使

$$P(z_j(\omega))=h(\omega)+o(1)=h(g(z_j(\omega)))+o(1).$$

即 $P(z)=h(g(z))+o(1)$ 或 $P(z)=h(g(z))$ 即 g 为 P 的右因子，且 $P(z_j)=h(\omega)$ 为一多项式. 再由 $E_j(\omega)=E_1(\omega)$ 知：$Q_0(z_j)-Q_0(z_1)+\sum_{s=1}^{r}(Q_s(z_j)-Q_s(z_1)e^{\lambda_s h(\omega)}=0$. 由引理 2 知：$Q_s(z_j)-Q_s(z_1$ 啊 $=0$, $s=0,1,\cdots,r$. 则同上类似地可证 g 为 Q_s, $(s=0,1,\cdots,r)$ 的右因子，亦即 g 为 Q_s $(s=0,1,\cdots,r)$ 及 P 的公共右因子. 证毕.

定理 2 的证明 与定理 1 类似地可证明以下几种情况必成立.

i) $\frac{k}{n}$ 为整数；

ii) $\frac{\lambda_s k}{n}$ 为整数，$s=1,\cdots m$，且 $\frac{\mu k}{n}$ 为非整数，$0<\mu<\lambda_s$.

以下分别讨论：

i) $\frac{k}{n}$ 为整数，此时与定理 1 的证明完全相似地可证 g 为 Q_s $(s=0,1\cdots,r)$ 及 P 的公共右因子.

ii) 在这种情形下，易见若 α 为 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 的最大公约数，则 $\frac{\alpha k}{n}$ 为整数. 此时与定理 1 相似地可证：若 $d_l\neq 0$, $0<l<k$，则 $\frac{\beta k}{n}$ 为整数且 $\frac{\mu k}{n}$ $(0<\mu<\beta)$ 非整数，β 为 α 的某一个约数，这样我们就得到 $P(z_j(\omega))=h(\omega_j^{\frac{1}{\beta}})+o(1)$ 或 $P(z_j(\omega))=h((g(z_j(\omega))^{\frac{1}{\beta}})+o(1)$.

即

$$P(z)=h(g(z))^{\frac{1}{\beta}})+o(1).$$

这证明 $g^{\frac{1}{\beta}}$ 必为一多项式(注意 h 为一不含 $\zeta^{t\beta}$ $(t=1,2,\cdots)$ 的多项式. 设 $g^{\frac{1}{\beta}}=g_1$，则 $g=g_1^\beta$ 且 $P=h\circ g_1$. 再同定理 1 一样可证 g_1 为 Q_s $(s=0,1,2,\cdots,m)$ 的右因子. 证毕.

关于定理 3，由定理 1 的证明过程，易知 F 的右因子必为 F_m 的右因子，进而必为 $F_{n-1},\cdots,F_1$ 的右因子.

5. 一 个 注 记

在定理 1 和定理 2 的证明过程中，我们根据引理 4，只考虑 F 为非周期函数的情形. 故余下的只要考虑 F 为周期函数的情形. 此时由引理 2 知 $Q_s(s=0,1,\cdots,r)$ 为常数，P 为线性多项式而 $\lambda_1,\lambda_2\cdots,\lambda_r$ 则为同一实数的整数倍，在这种情形，F 为指数型周期整函数，根据[7]的结果，我们的定理仍然成立.

参 考 文 献

[1] Gross, F., *Factorization of meromorphic functions*, U. S. Gov. Printing Office, 1972.

[2] G. D. Song & C. C. Yang, *On pseudo — primality of the combination of meromorphic functions satisfying linear differential equations*, Contemp. Math. Vol. 25 (1983), 155—162.

[3] L. W. Liao & G. D. Song, *Prime entire functions which have prescribed deficient function with given deficiency, to appear.*

[4] G. D. Song, *On primality of the combination of exponential functions*, China Ann. Math., 6(4), Ser. B. (1985), 433—438.

[5] Borel, E., *Sur les zeros des fonctions entieres*, Acta. Math. 20(1987), 357—396.

[6] Gross, F., *On factorization of meromorphic functions*, Trans. Amer. Math. Soc., 131 (1968), 215—222.

[7] 王善柱、杨玉珍，关于多项式与指数型周期函数的乘积的素性，哈尔滨师范大学自然科学学报，Vol. 4, No. 4 (1988), 1—7.