第12卷第4期 数学研究与评论 Vol. 12 No. 4
1992年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov. 1992

四元数矩阵乘积的奇异值与特征值的不等式*

杨 忠 鹏

(吉林师范学院数学系，吉林市 132011)

摘 要

本文给出了两个四元数矩阵乘积的奇异值的一些不等式，在此基础上估计了两个自共轭矩阵 A、B 的乘积的每个特征值，其中 $A\geqslant 0$、$B\geqslant 0$ 或 $B>0$.

在谢邦杰教授的开创性工作基础上[1][2]，庄瓦金给出了四元数体 Q 上矩阵的奇异值分解[3]，得到了 Q 上矩阵的特征值和奇异值的一些不等式[4]. 即使在复数域上，对矩阵乘积的特征的估计也是很困难的. 曹重光给出了 Q 上半正定矩阵乘积及正定阵与自共轭矩阵乘积的特征值的估计[5]. 本文将在上述基础上，给出 Q 上矩阵乘积的奇异值的一些不等式，然后利用奇异值和特征值的关系，给出某些自共轭矩阵的乘积的每个特征值的估计.

约定 $GL_n(Q)$、$SC_n(Q)$、$GU_n(Q)$ 分别为 Q 上非奇异、自共轭、广义酉阵的集合，当 $A(\in SC_n(Q))$ 为半正定(正定)时，记 $A\geqslant 0(A>0)$，对 $A\in Q^{m\times n}$，由[3]、[4]设其奇异值 $\sigma_1(A)\geqslant\sigma_2(A)\geqslant\cdots\sigma_{\min(m,n)}(A)\geqslant 0$. 如果 $A\in Q^{n\times n}$ 的特征值为实数，则约定 $|\lambda_1(A)|\geqslant|\lambda_2(A)|\geqslant\cdots\geqslant|\lambda_n(A)|$.

显然[4]的引理 2 与定理 1 可改写为：

设 $A\in SC_n(Q)$ 的特征值 $\lambda_1(A)\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n(A)$，$A$ 的 $m(\leqslant n)$ 阶顺序主子阵 A_m 的特征值 $\lambda_1(A_m)\geqslant\cdots\geqslant\lambda_m(A_m)$，则

$$\lambda_k(A)=\min_{M\in Q^{(k-1)\times n}}\max\{x^*Ax\mid \|x\|=1,Mx=0\},k=1,2,\cdots,n, \tag{1}$$

$$\lambda_k(A)\geqslant L_k(A_m)\geqslant\lambda_{k+(n-m)}(A),k=1,2,\cdots,m. \tag{2}$$

范数 $\|\cdot\|$ 是由[5]所定义的，易知当 $x\in Q^n$ 时，$\|x\|=(x^*x)^{\frac{1}{2}}=\|x^*\|$.

引理 1 设 $A,B\in Q^{n\times n}$，则

$$\sigma_k(AB)\leqslant\sigma_t(A)\sigma_{k-t+1}(B),k=1,2,\cdots,n;\ t=1,2,\cdots,k. \tag{3}$$

证明 由[3]设 A、B、AB 的奇异值分解：

$$A=U_1D_1V_1^*,\ B=U_2D_2V_2^*,\ AB=U_3D_3V_3^*. \tag{4}$$

其中 U_i、$V_i\in GU_n(Q)$，D_i 为相应矩阵的依递减排序的奇异值为对角元素的对角阵 $(i=1,2,3)$. 由(4)

$$AB=(U_3V_3^*)(V_3D_3V_3^*)=UP, \tag{5}$$

* 1990年10月17日收到.

其中 $U=U_3V_3^*\in GU_n(Q)$，$P=V_3D_3V_3^*\geqslant 0$. 设 $x\in Q^n$，由[5]的引理 3 及(5)

$$\|x^*Px\|^2=\|x^*U^*ABx\|^2=\|(A^*Ux)^*(Bx)\|^2\leqslant\|A^*Ux\|^2\cdot\|Bx\|^2$$
$$=((Ux)^*AA^*(Ux))\cdot(x^*B^*Bx). \tag{6}$$

设 $U_1=(u_1,\cdots,u_n)$，$V_2=(v_1,\cdots,v_n)$，$M^*=(U^*u_1,\cdots,U^*u_{t-1},v_1,\cdots,v_{k-t})$，则 $M\in Q^{(k-1)\times n}$. 由 $1\leqslant k\leqslant n$ 及[1]，有 $y\in Q^n(\|y\|=1)$使 $My=0$，即 $u_i^*y=0(j=1,2,\cdots,t-1)$，$v_j^*y=0(i=1,2,\cdots,k-t)$. 因此 $y_1=U_1^*Uy=(\underbrace{0,\cdots,0}_{t-1},*,\cdots,*)^T$，$y_2=V_2^*y=(\underbrace{0,\cdots,0}_{k-t},*,\cdots,*)^T$ 且 $\|y_1\|=\|y_2\|=\|y\|=1$. 这样由(4)，$(Uy)^*AA^*(Uy)=y_1^*D_1^2y_1\leqslant\sigma_t^2(A)\|y_1\|^2=\sigma_t^2(A)$，$y^*B^*By=y_2^*D_2^2y_2\leqslant\sigma_{k-t+1}^2(B)\|y_2\|^2=\sigma_{k-t+1}^2(B)$. 从 $P\geqslant 0$ 及(1)、(5)，$\lambda_k^2(P)=\sigma_k^2(P)=\sigma_k^2(AB)\leqslant\max\limits_{M\in Q^{(k-1)\times n}}\{(y^*Py)^2\mid\|y\|=1,My=0\}$，故由(6)知(3)成立. □

[6]曾将(3)的变形作为推广 $\sigma_{i+j-1}(A+B)\leqslant\sigma_i(A)+\sigma_j(B)$(此时 A,B 为复阵)的习题.

定理 1 设 $A\in Q^{m\times n}$，$B\in Q^{n\times s}$，则

$$\sigma_k(AB)\leqslant\min_{t=1,2,\cdots,k}\{\sigma_t(A)\sigma_{k-t+1}(B)\},\ k=1,2,\cdots,\min(m,n,s). \tag{7}$$

证明 1) 当 $m\leqslant n\leqslant s$ 时，设 $\tilde{A}=\begin{pmatrix}A&0\\0&0\end{pmatrix}$，$\tilde{B}=\begin{pmatrix}B\\0\end{pmatrix}\in Q^{s\times s}$，从 $\tilde{A}\tilde{B}=\begin{pmatrix}AB\\0\end{pmatrix}$，$(\tilde{A}\tilde{B})(\tilde{A}\tilde{B})^*=\mathrm{diag}((AB)(AB)^*,0)$，$\tilde{A}\tilde{A}^*=\mathrm{diag}(AA^*,0)$，$\tilde{B}\tilde{B}^*=\mathrm{diag}(BB^*,0)$再从(3)，$\sigma_k(\tilde{A}\tilde{B})=\sigma_k(AB)\leqslant\sigma_t(\tilde{A})\sigma_{k-t+1}(\tilde{B})=\sigma_t(A)\sigma_{k-t+1}(B)$，$k=1,2,\cdots,m$.

2) 当 $m\leqslant s\leqslant n$ 时，设 $\tilde{A}=\begin{pmatrix}A\\0\end{pmatrix}$，$\tilde{B}=[B,0]\in Q^{n\times n}$，从 $\tilde{A}\tilde{A}^*=\mathrm{diag}(AA^*,0)$，$\tilde{B}^*\tilde{B}=\mathrm{diag}(B^*B,0)$，$(\tilde{A}\tilde{B})(\tilde{A}\tilde{B})^*=\mathrm{diag}((AB)(AB)^*,0)$，仿 1)知(7)成立.

3) 当 $n\leqslant m\leqslant s$ 时，设 $\tilde{A}=\begin{pmatrix}A&0\\0&0\end{pmatrix}$，$\tilde{B}=\begin{pmatrix}B\\0\end{pmatrix}\in Q^{s\times s}$，类似于 1)知(7)成立.

4) 当 $n\leqslant s\leqslant m$ 时，设 $\tilde{A}=[A,0]$，$\tilde{B}=\begin{pmatrix}B&0\\0&0\end{pmatrix}\in Q^{m\times m}$，从 $\tilde{A}^*\tilde{A}=\mathrm{diag}(A^*A,0)$，$\tilde{B}\tilde{B}^*=\mathrm{diag}(BB^*,0)$，$(\tilde{A}\tilde{B}^*)(\tilde{A}\tilde{B})=\mathrm{diag}((AB)^*(AB),0)$，知(7)成立.

5) 当 $s\leqslant m\leqslant n$ 时，设 $\tilde{A}=\begin{pmatrix}A\\0\end{pmatrix}$，$\tilde{B}=[B,0]\in Q^{n\times n}$，类似于 2)知(7)成立.

6) 当 $s\leqslant n\leqslant m$ 时，设 $\tilde{A}=[A,0]$，$\tilde{B}=\begin{pmatrix}B&0\\0&0\end{pmatrix}\in Q^{m\times m}$，类似于 4)知(7)成立.

综上知(7)成立.

定理 2 设 A、$B\in GL_n(Q)$. 则

$$\sigma_k(AB)\geqslant\max_{t=1,2,\cdots,n-k+1}\{\sigma_{k+t-1}(A)\sigma_{n-t+1}(B)\},\ k=1,2,\cdots,n. \tag{8}$$

证明 由[3]、[4]知，当 $M\in GL_n(Q)$时，$\sigma_i^{-1}(M)=\sigma_{n-i+1}(M^{-1})$ $(i=1,2,\cdots,n)$. 由已知及(3)，$\sigma_{n-k+1}((AB)^{-1})=\sigma_{n-k+1}(B^{-1}A^{-1})\leqslant\sigma_t(B^{-1})\sigma_{n-k-t+2}(A^{-1})$，这样就得到(8).

定理 3 设 A、$B\in SC_n(Q)$，$A\geqslant 0$，$B\geqslant 0$，$\mathrm{rank}AB=m$，$\mathrm{rank}A=r$，$\mathrm{rank}B=s$，则

$$\lambda_k(AB)\leqslant\min_{\substack{t=1,2,\cdots,k_1\\ l=1,2,\cdots,k-t+1}}\{(\lambda_t(A)\lambda_{k-t-l+2}(A))^{\frac{1}{2}}\lambda_l(B),(\lambda_t(B)\lambda_{k-t-l+2}(B))^{\frac{1}{2}}\lambda_l(A)\},k=1,2,\cdots,n. \tag{9}$$

$$\lambda_k(AB) \leqslant \max_{\substack{t=1,2,\cdots,m-k+1;\\ l=1,2,\cdots,t}} \begin{cases} (\lambda_{k+t-1+r-m}(A)\lambda_{r-l+1}(A))^{\frac{1}{2}}\lambda_{m-t+l+n-r}(B), \\ (\lambda_{k+t-1+n-r}(B)\lambda_{m-l+1+n-r}(B))^{\frac{1}{2}}\lambda_{r-t+l}(A), \\ (\lambda_{k+t-1+s-m}(B)\lambda_{s-l+1}(B))^{\frac{1}{2}}\lambda_{m-t+l+n-s}(A), \\ (\lambda_{k+t-1+n-s}(A)\lambda_{m-l+1+n-s}(A))^{\frac{1}{2}}\lambda_{s-t+l}(B), \end{cases} \quad k=1,2,\cdots,m. \tag{10}$$

证明 由[1]设 $UAU^*=\mathrm{diag}(D,0)$,$U\in GU_n(Q)$,$D=\mathrm{diag}(\lambda_1(A),\cdots,\lambda_r(A))>0$, 因此 $\lambda_i(D)=\sigma_i(A)$ $(i=1,2,\cdots,r)$. 由[2],$\begin{bmatrix} D^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} UBU^* \begin{bmatrix} D^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 & B_2^* \\ B_2 & B_3 \end{pmatrix} \geqslant 0$ 且 $B_1=D^{\frac{1}{2}}U_1BU_1{}^*D^{\frac{1}{2}}\geqslant 0$,因此 $\lambda_i(B_1)=\sigma_i(D^{\frac{1}{2}}U_1BU_1{}^*D^{\frac{1}{2}})\geqslant 0$ $(i=1,2,\cdots,r)$,这里 $U^*=(U_1^*,U_2^*)$. 由[5],有 $L=\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ -X_0 & I \end{pmatrix}$ 使 $\begin{pmatrix} B_1 & B_2^* \\ B_2 & B_3 \end{pmatrix} L^*=\mathrm{diag}(B_1,B_3-X_0B_2^*)$,这样 $(U^*\mathrm{diag}(D^{\frac{1}{2}},I)L^*)^{-1}AB(U^*\mathrm{diag}(D^{\frac{1}{2}},I)L^*)=\mathrm{diag}(B_1,0)$. 故 $\lambda_k(AB)=\lambda_k(B_1)=\sigma_k(D^{\frac{1}{2}}U_1BU_1^*D^{\frac{1}{2}})$ $(k=1,2,\cdots,r)$, $\lambda_k(AB)=0$ $(k=r+1,\cdots,n)$. 注意 $U_1BU_1^*$ 是 UBU^* 的 r 阶主子阵,由(2) $\sigma_i(U_1BU_1^*)=\lambda_i(U_1BU_1^*)\leqslant\lambda_i(B)=\sigma_i(B)$ $(i=1,2,\cdots,r)$,这样从(3) $\lambda_k(AB)=\sigma_k(D^{\frac{1}{2}}U_1BU_1^*D^{\frac{1}{2}})\leqslant\sigma_t(D^{\frac{1}{2}})\sigma_{k-t+1}(U_1BU_1^*D^{\frac{1}{2}})\leqslant\sigma_t(D^{\frac{1}{2}})\sigma_l(U_1BU_1^*)\sigma_{k-t-l+2}(D^{\frac{1}{2}})\leqslant(\lambda_t(A)\lambda_{k-t-l+2}(A))^{\frac{1}{2}}\lambda_l(B)$, $k=1,2,\cdots,n$; $t=1,2,\cdots,k$; $l=1,2,\cdots,k-t+1$. 从[7]的定理 2 知,AB 与 BA 具有相同的特征根. 因此(9)式成立.

由上知 $\mathrm{rank}U_1BU_1^*=\mathrm{rank}AB=m$,可设 $V_1U_1BU_1^*V_1^*=\mathrm{diag}(\Lambda,0)$, $V_1\in GU_r(Q)$, $\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1(U_1BU_1^*),\cdots,L_m(U_1BU_1^*))>0$. 由[2],$\tilde{D}=V_1DV_1^*=\begin{pmatrix} D_1 & D_2^* \\ D_2 & D_3 \end{pmatrix}>0$. 且 $D_1>0$. 由[5],有 $L_1=\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ -X_1 & I \end{pmatrix}$ 使 $L_1=\begin{pmatrix} D_1 & D_2^* \\ D_2 & D_3 \end{pmatrix} L_1^*=\mathrm{diag}(D_1,D_3-X_1D_2^*)$,因此 $(L_1^{*-1}V_1D^{-\frac{1}{2}})B_1(L_1^{*-1}V_1D^{-\frac{1}{2}})^{-1}=\mathrm{diag}(\Lambda D_1,0)$. 这样 B_1 与 $D_1^{\frac{1}{2}}(\Lambda D_1)D_1^{-\frac{1}{2}}=D_1^{\frac{1}{2}}\Lambda D_1^{\frac{1}{2}}>0$,$\Lambda^{\frac{1}{2}}(\Lambda D_1)\Lambda^{\frac{1}{2}}=\Lambda^{\frac{1}{2}}D_1\Lambda^{\frac{1}{2}}>0$ 具有相同的非零特征值,故 $\lambda_k(AB)=\sigma_k(D_1^{\frac{1}{2}}\Lambda D_1^{\frac{1}{2}})=\sigma_k(\Lambda^{\frac{1}{2}}D_1\Lambda^{\frac{1}{2}})$ $(k=1,2,\cdots,m)$, $\lambda_k(AB)=0$ $(k=m+1,\cdots,n)$. 由(2), $\sigma_i(D_1)=\lambda_i(D_1)\geqslant\lambda_{i+k-m}(V_1DV_1^*)=\lambda_{i+r-m}(A)=\sigma_{i+r-m}(A)$, $\sigma_i(\Lambda)=\sigma_i(U_1BU_1^*)=\lambda_i(U_1BU_1^*)\geqslant\lambda_{i+n-r}(B)=\sigma_{i+n-r}(B)$ $(i=1,2,\cdots,m)$. 因此从(8) $\lambda_k(AB)=\sigma_k(D_1^{\frac{1}{2}}\Lambda D_1^{\frac{1}{2}})\geqslant\sigma_{k+t-1}(D_1^{\frac{1}{2}})\sigma_{m-t+1}(\Lambda D_1^{\frac{1}{2}})\geqslant\sigma_{k+t-1}(D_1^{\frac{1}{2}})\sigma_{m-t+1+l-1}(\Lambda)\sigma_{m-l+1}(D_1^{\frac{1}{2}})\geqslant(\lambda_{k+t-1+r-m}(A)\lambda_{r-l+1}(A))^{\frac{1}{2}}\lambda_{m-t+l+n-r}(B)$, . $\lambda_k(AB)=\sigma_k(\Lambda^{\frac{1}{2}}D_1\Lambda^{\frac{1}{2}})\geqslant(\lambda_{k+t-1+n-r}(B)\lambda_{m-l+1+n-r}(B))^{\frac{1}{2}}\lambda_{r-t+l}(A)$, $k=1,2,\cdots,m$; $t=1,2,\cdots,m-k+1$; $l=1,2,\cdots,t$. 利用[7]的定理 2,可对称得到 $\lambda_k(BA)(=\lambda_k(AB))$ 的类似的不等式,这样就证明了(10).

易知[5]及[8]—[11]在复阵上,当 $A\geqslant 0$、$B\geqslant 0$ 时的结果可概括于下式:

$$\lambda_n(A)\lambda_n(B)\leqslant\lambda_i(AB)\leqslant\lambda_1(A)\lambda_1(B),\quad 1\leqslant i\leqslant n. \tag{11}$$

(11)可从定理 3 得到:在(9)中令 $k=1$,则 $t=l=1$ 且 $\lambda_i(AB)\leqslant\lambda_1(AB)\leqslant\lambda_1(A)\lambda_1(B)$;如果 $\lambda_n(A)\lambda_n(B)=0$,则(11)成立;如果 $\lambda_n(A)\lambda_n(B)\neq 0$,则 $r=s=m=n$,在(10)中令 $k=n$,那么 $t=l=1$ 且 $\lambda_i(AB)\geqslant\lambda_n(AB)\geqslant\lambda_n(A)\lambda_n(B)$,即(11)成立.

设 $\lambda_{\min}(M)$ 表示 $M\in Q^{n\times n}$ 的最小正特征值,如果 M 的特征值存在且为实数. [5]以例指出,当 $A\geqslant 0$、$B\geqslant 0$ 时,一般 $\lambda_{\min}(AB)\ngeqslant\lambda_{\min}(A)\lambda_{\min}(B)$. 此时从(10)

$$\lambda_{\min}(AB)=\lambda_m(AB)\geqslant\max\{\lambda_r(A)\lambda_{m+n-r}(B),\lambda_{m+n-s}(A)\lambda_s(B)\},\tag{12}$$

进而当 $B>0$ 时，从 $r=m$ 及(9)，(12)，

$$0<\lambda_r(A)\lambda_n(B)\leqslant\lambda_i(AB)\leqslant\lambda_1(A)\lambda_1(B),\quad 1\leqslant i\leqslant r.\tag{13}$$

(13)应用复数域就是[9]的命题 1.

推论 1 设 $A,B\in SC_n(Q)$，$A\geqslant0$，$B\geqslant0$. 如果 Sylvester 不等式[12]($\mathrm{rank}AB\geqslant\mathrm{rank}A+\mathrm{rank}B-n$)的等号成立，则

$$\lambda_{\min}(AB)\geqslant\lambda_{\min}(A)\lambda_{\min}(B)>0.$$

只要注意此时 $m+n-r=s$，$m+n-s=r$，由(13)即可推论 1.

由[5]、[7]知，当 $A\geqslant0$，$B\geqslant0$ 时，AB 相似于实对角阵，这是[5]，[8]－[11]所讨论对象的一个基本特征，设 $A=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}\in SC_2(Q)$，$B=\mathrm{diag}(1,0)\geqslant0$，则 $AB=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$是不能相似对角阵的，因此当 $A\geqslant0$，$B\in SC_n(Q)$ 或 $A\in SC_n(Q)$，$B\geqslant0$ 时，一般 AB 不再是可对角化的矩阵. 但仍可有

推论 2 设 A,B 是 $n\times n$ 的 Hermite 矩阵，如果 $B\geqslant0$，则

$$|\lambda_k(AB)|\leqslant\min_{\substack{t=1,2,\cdots,k;\\ l=1,2,\cdots,k-t+1}}\{(\lambda_t(B)\lambda_{k-t-l+2}(B))^{\frac12}|\lambda_l(A)|\}\quad k=1,2,\cdots,n.\tag{14}$$

证明 在复数域上，$\sigma_i(B^{\frac12}AB^{\frac12})=|\lambda_i(B^{\frac12}AB^{\frac12})|=|\lambda_i(AB)|$，又 $|\lambda_i(A)|=\sigma_i(A)$ $(1\leqslant i\leqslant n)$，由(3)仿(9)的证明即可得(14).

定理 4 设 $A,B\in SC_n(Q)$，$\mathrm{rank}A=r$，$B>0$. 则(14)成立且

$$|\lambda_k(AB)|\geqslant\max_{\substack{t=1,2,\cdots,r-k+1;\\ l=1,2,\cdots,t}}\{(\lambda_{k+t-1+n-r}(B)\lambda_{n-l+1}(B))^{\frac12}|\lambda_{r-t+l}(A)|\},\quad k=1,2,\cdots,r.\tag{15}$$

证明 由 $B^{\frac12}(AB)B^{-\frac12}=B^{\frac12}AB^{\frac12}$，知 $|\lambda_i(AB)|=|\lambda_i(B^{\frac12}AB^{\frac12})|=\sigma_i((B^{\frac12}AB^{\frac12})$，又 $|\lambda_i(A)|=\sigma_i(A)$，$\sigma_i(B)=\lambda_i(B)$，$i=1,2,\cdots,n$，仿推论 2 的证明，知此时(14)成立.

由[1]设 $UAU^*=\mathrm{diag}(D,0)$，$U\in GU_n(Q)$，$D=\mathrm{diag}(\lambda_1(A),\cdots,\lambda_r(A))$非奇异. 由[2]，$UBU^*=\begin{pmatrix}B_1&B_2^*\\B_2&B_3\end{pmatrix}>0$ 且 $B_1>0$. 由[5]有 $L=\begin{pmatrix}I_r&0\\-X_0&I\end{pmatrix}$使 $LUBU^*L^*=\mathrm{diag}(B_1,B_3-X_0B_2^*)$且 $L^{*-1}UA$ $U^*L^{-1}=\mathrm{diag}(D,0)$，因此$(L^{*-1}U)AB\cdot(L^{*-1}U)^{-1}=\mathrm{diag}(DB_1,0)$. 从 $B_1^{\frac12}(DB_1)B_1^{-\frac12}=B_1^{\frac12}DB_1^{\frac12}\in SC_r(Q)$，$|\lambda_k(AB)|=|\lambda_k(B_1^{\frac12}DB_1^{\frac12})|=\sigma_k(B_1^{\frac12}DB_1^{\frac12})$ $(k=1,2,\cdots,r)$，$\lambda_r(AB)=0$ $(k=r+1,\cdots,n)$. 又 B_1 是 UBU^* 的 r 阶顺序主子阵，从(2)$\sigma_i(B_1)=\lambda_i(B_1)\geqslant\lambda_{i+n-r}(UBU^*)=\lambda_{i+n-r}(B)=\sigma_{i+n-r}(B)$，$i=1,2,\cdots,r$. 这样当 $1\leqslant k\leqslant r$ 时，从(8) $|\lambda_k(AB)|=\sigma_k(B_1^{\frac12}DB_1^{\frac12})\geqslant\sigma_{k+t-1}(B_1^{\frac12})\sigma_{r-t+1}(DB_1^{\frac12})\geqslant\sigma_{k+t-1}(B_1^{\frac12})\sigma_{r-t+1+l-1}(D)\sigma_{r-l+1}(B_1^{\frac12})\geqslant(\lambda_{k+t-1+n-r}(B)\lambda_{n-l+1}(B))^{\frac12}|\lambda_{r-t+l}(A)|$，$t=1,2,\cdots,r-k+1$；$l=1,2,\cdots,t$. 即(15)成立.

由(14)、(15)可将[9]的复数域上的结果(13)推广成为

推论 3 设 A、$B\in SC_n(Q)$，$\mathrm{rank}A=r$，$B>0$. 则 $0<|\lambda_r(A)|\lambda_n(B)\leqslant|\lambda_i(AB)|\leqslant|\lambda_1(A)|\cdot\lambda_1(B)$，$1\leqslant i\leqslant r$.

在(15)中令 $k=r$，则 $t=l=1$ 且 $|\lambda_i(AB)|\geqslant|\lambda_r(AB)|\geqslant|\lambda_r(A)|\lambda_n(B)$，即得推论 3. 由推论 3 可将[5]，[8]－[11]的基本结果(11)推广为

推论 4 设 A、$B\in SC_n(Q)$，$B>0$. 则 $|\lambda_n(A)|\lambda_n(B)\leqslant|\lambda_i(AB)|\leqslant|\lambda_1(A)|\lambda_1(B)|$，$1\leqslant i\leqslant n$.

由[13]知 Q 上的中心封闭阵是比 Q 上自共轭矩阵更广泛的一类特殊的可中心化矩阵. 由[13]知 $A\in Q^{n\times n}$ 为 Q 上中心封闭阵 $\Leftrightarrow$ 有 $P,H\in SC_n(Q)$，$P>0$ 使 $A=PH$. 由[7]知 PH 与 HP 相似于同一实对角阵. 故可用(14)、(15)来估计 Q 上中心封闭阵的每个特征值的上、下界.

[5]及[8]－[11]在复数域上的结果的基本方法是用因子的最大特征值之积、最小特征值之积来估计乘积特征值的整体，这种方法对乘积的最大(最小)特征值(按绝对值)是有效的. 下面的例子表明，乘积的第 k 个特征值 $|\lambda_k(AB)|$ 的上、下界一般不能用 $|\lambda_k(A)\lambda_k(B)|$ 来估计($2\leqslant k\leqslant n-1$). 设 $=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&3&0\\0&0&1\end{bmatrix}>0$，$B=\mathrm{diag}(1,3,1)>0$，则 $\lambda_2(AB)=\frac{1}{2}(11-\sqrt{61})>\lambda_2(A)\lambda_2(B)$. 设 $A=\mathrm{diag}(2,1,3)$，$B=\mathrm{diag}(1,2,2)$，则 $\lambda_2(AB)=2<\lambda_2(A)\lambda_2(B)$. 这样看来，本文应用奇异值的性质所得到的乘积的每个特征值上、下界的估计是很有意义的. 设 $A=PH\in GL_n(Q)$ 是中心封闭阵，由(14)、(15)得 $|\lambda_2(A)|=|\lambda_2(HP)|\leqslant\min\{\lambda(P)|\lambda_2(H)|,(\lambda_1(P)\lambda_2(P))^{\frac{1}{2}}|\lambda_1(H)|\}$，$|\lambda_{n-1}(A)|=|\lambda_{n-1}(HP)\geqslant\max\{(\lambda_{n-1}(P)\lambda_n(P))^{\frac{1}{2}}|\lambda_n(H)|,\lambda_n(P)|\lambda_{n-1}(P)|\}$. 作为应用的另一个例子，我们可再次得由[4]推广到 Q 上的惯性律的 Ostrowski 数量公式[14].

推论 5 设 $A\in SC_n(Q)$，$P\in GL_n(Q)$，$B=PAP^*$. 则

$$\begin{aligned}&\sigma_n^2(P)\lambda_k(A)\leqslant\lambda_k(B)\leqslant\sigma_1^2(P)\lambda_k(A),\text{若 }\lambda_k(A)\geqslant 0,\\&\sigma_1^2(P)\lambda_k(A)\leqslant\lambda_k(B)\leqslant\sigma_n^2(P)\lambda_k(A),\text{若 }\lambda_k(A)\leqslant 0,\end{aligned}\tag{16}$$

其中 $k=1,2,\cdots,n$.

证明 从 $P^*BP^{*-1}=(P^*P)A$，知 $\lambda_i(B)=\lambda_i(P^*PA)$；由 $P^*P>0$，知 $\lambda_i(P^*P)=\sigma_i^2(P)>0$ ($1\leqslant i\leqslant n$).

令 $\mathrm{rank}A=r$，则 $\mathrm{rank}B=r$. 当 $k>r$ 时，$\lambda_k(A)=\lambda_k(B)=0$，即(16)成立. 因此只考虑 $k\leqslant r$. 在(14)中令 $t=1$，则 $l=k$ 且 $|\lambda_k(B)|=|\lambda_k(P^*PA)|\leqslant\lambda_1(P^*P)|\lambda_k(A)|=\sigma_1^2(P)|\lambda_k(A)|$. 在(15)中取 $t=r-k+1$，$l=1$，则 $|\lambda_k(B)|\geqslant\lambda_n(P^*P)|\lambda_k(A)|=\sigma_n^2(P)|\lambda_k(A)|$，因此

$$\sigma_n^2(P)|\lambda_k(A)|\leqslant|\lambda_k(B)|\geqslant\sigma_1^2(P)|\lambda_k(A)|.\tag{17}$$

对 $M\in Q^{(k-1)\times n}$，$\|x\|=1$ 且 $Mx=0$ 来说，$MP^{*-1}\in Q^{(k-1)\times n}$ 且 $x_0=\frac{1}{\|p^*x\|}p^*x$，$\|x_0\|=1$，$Mp^*x_0=0$. 又 $x^*Ax=\|p^*x\|^2(x_0^*Bx_0)$，$\|p^*x\|^2>0$. 从[4]的引理 2 知 $\lambda_k(A)\neq 0$ 时，$\lambda_k(B)\neq 0$ 且 $\lambda_k(A)$、$\lambda_k(B)$ 同号，这样由(17)可得(16).

[15]证明，当 $B\in SC_n(Q)$ 时，$\sum_{k=1}^{n}\lambda_k(B)=\mathrm{tr}B$. 对 $A\in Q^{m\times n}$，从[5]，$\|A\|=\|A^*\|=\sigma_1(A)$；从[3] $\sigma_k(A)=\sigma_k(A^*)$ 且 $\sum_{k=1}^{m}\sigma_k(A)=\sum_{k=1}^{n}\sigma_k(A)=\mathrm{tr}(AA^*)^{\frac{1}{2}}=\mathrm{tr}(A^*A)^{\frac{1}{2}}$. 应用这些事实及本文的结果，可改进[16]的一个结果.

推论 6 设 $P\in Q^{m\times n}$，$A\in SC_n(Q)$，则

$$|\mathrm{tr}PAP^*|\leqslant\min\{\|A\|\mathrm{tr}PP^*,\|PP^*\|\mathrm{tr}(A^2)^{\frac{1}{2}}\}\leqslant\mathrm{tr}(A^2)^{\frac{1}{2}}\mathrm{tr}PP^*.\tag{18}$$

证明 设 $S=\min\{m,n\}$. 从 $PAP^*\in SC_m(Q)$，$|\mathrm{tr}PAP^*|=|\sum_{k=1}^{m}\lambda_k(PAP^*)|\leqslant\sum_{k=1}^{m}|\lambda_k(PAP^*)|$

$= \sum_{k=1}^{m}\sigma_k(PAP^*) = \sum_{k=1}^{s}\sigma_k(PAP^*)$. 在(3)中分别取 $t=1$; $t=k$ 有 $\sigma_k(PAP^*)\leqslant\sigma_1(P)\sigma_k(AP^*)\leqslant\sigma_1(P)\sigma_k(A)\sigma_1(P^*)=\sigma_1^2(P)\sigma_k(A)=\|PP^*\|\sigma_k(A)$，因此 $|\mathrm{tr}PAP^*|\leqslant\|PP^*\|\sum_{k=1}^{s}\sigma_k(A)\leqslant\|PP^*\|\sum_{k=1}^{s}\sigma_k(A)=\|PP^*\|\mathrm{tr}(A^2)^{\frac{1}{2}}\leqslant\mathrm{tr}(A^2)^{\frac{1}{2}}\mathrm{tr}PP^*$.

如果在(3)中分别取 $t=k$; $t=1$ 有 $\sigma_k(PAP^*)\leqslant\sigma_k(P)\sigma_1(AP^*)\leqslant\sigma_k(P)\sigma_1(A)\sigma_k(P^*)=\|A\|\sigma_k^2(P)$，这样 $|\mathrm{tr}PAP^*|\leqslant\|A\|\sum_{k=1}^{s}\sigma_k^2(P)\leqslant\|A\|\sum_{k=1}^{m}\sigma_k^2(P)=\|A\|\mathrm{tr}PP^*\leqslant\mathrm{tr}(A^2)^{\frac{1}{2}}\mathrm{tr}PP^*$. 由此知(18)成立. 当 $A>0$ 时，可由(18)得[16]的定理 1.

参 考 文 献

[1] 谢邦杰，吉林大学自然科学学报，3(1980)，1—33.

[2] 谢邦杰，吉林大学自然科学学报，1(1982)，1—7.

[3] 庄瓦金，数学研究与评论，4(1986)，23—25.

[4] 庄瓦金，数学进展，4(1988)，403—407.

[5] Cao Chongguang, J. of Math. Res. & Exposion, 1(1990), 19—22.

[6] R. A. Horn and C. R. Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge U. P., New York, (1985).

[7] 曹重光，数学研究与评论，3(1988)，346—348.

[8] Sha Hayun, Linear Algebra Appl., 73(1986), 147—150.

[9] 丁树良，江西师范大学学报(自)，4(1987)，17—22.

[10] 徐德余，数学的实践与认识，1(1989)，53—54.

[11] 游光荣，数学实践与认识，3(1990)，51—54.

[12] 谢邦杰，抽象代数学，上海科学技术出版社，(1982)，298.

[13] 屠伯埙，数学杂志，3(1989)，232—237.

[14] Ostrowski, A. M., Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 45(1959), 740—744.

[15] 屠伯埙，数学研究与评论，1(1989)，1—7.

[16] 曹重光，数学杂志，3(1988)，313—314.

Inequalities of Singular Values and Eingenvalues of Product of two Quaternion Matrices

Yang Zhongpeng

(Dept. Math., Jilin Teachers' College, China)

Abstract

In this paper we give some inequalities of singular values of product of two quaternion matrices. Based on this point we estimate each eigenvalue of product of self-conjugate quaternions matrices A and B for $A\geq 0, B\geq 0$ or $B>0$.