第12卷第4期 数学研究与评论 Vol. 12 No. 4
1992年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov. 1992

# 关于对偶式和对偶规则的评注*

李 盘 林
(大连理工大学计算机科学与工程系，116024)

逻辑中的对偶性提出是很早的，可追溯到十九世纪七十年代末，这应归功于 E. Schroder. 与它有关的对偶式概念和对偶规则(有的书称为对偶原理或对偶原则或对偶定理)在数学专著或离散数学中都有所出现. 但是，对偶式定义却是不尽相同；对偶规则尽管形式上是一样的，而其内涵也是不一样的. 在本文中不再详细罗列出各家的对偶式的定义和对偶规则的叙述，今仅就有代表性的不同说法，归纳为三种情况叙述之.

情况 1：

**定义** 1(对偶式) 在给定的仅含联结词$\sim$、$\wedge$和$\vee$的命题公式 $A$ 中，将$\wedge$和$\vee$、$F$ 和 $T$ 相互交换后，得到公式 $A^*$，称 $A^*$ 为 $A$ 的对偶式.

显然，$A^*$ 和 $A$ 互为对偶式.

**定理** 1(对偶式定理) 设 $A(P_1,P_2,\cdots,P_n)$和 $A^*(P_1,P_2,\cdots,P_n)$为对偶式，其中 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 是出现在 $A$ 和 $A^*$ 中的所有原子命题变项，则 $A^*(P_1,P_2,\cdots,P_n)=\sim A(\sim P_1,\sim P_2,\cdots,\sim P_n)$

**定理** 2(对偶规则) 设 $A$ 和 $B$ 为两个命题公式，则有

(1) 如果 $A\Leftrightarrow B$，则 $A^*\Leftrightarrow B^*$.

(2) 如果 $A\Rightarrow B$，则 $B^*\Rightarrow A^*$.

情况 2：

**定义** 2(对偶式) 在给定的仅含联结词$\sim$、$\wedge$和$\vee$的命题公式 $A$ 中，将$\wedge$和$\vee$、$F$ 和 $T$ 以及原子命题变项和其定否相互交换后，得到公式 $A^*$，称 $A^*$ 为 $A$ 的对偶式.

显然，$A^*$ 和 $A$ 也互为对偶式.

**定理** 3(对偶式定理) 设 $A(P_1,P_2,\cdots,P_n)$和 $A^*(P_1,P_2,\cdots,P_n)$为对偶式，其中 $P_1,P_2,\cdots P_n$ 是出现在 $A$ 和 $A^*$ 中的所有原子命题变项，则 $A^*(P_1,P_2,\cdots,P_n)\Leftrightarrow\sim A(P_1,P_2,\cdots,P_n)$

**定理** 4(对偶规则) 同情况 1 中的定理 2.

情况 3：

**定义** 3(对偶式) 同情况 2 中的定义 2.

**定理** 5(对偶式定理) 同情况 2 中的定理 3.

**定理** 6(对偶规则) 同情况 1 中的定理 2.

据我所知，情况 1 居多[1]、[2]、[4]、[5]、[6]、[7]、[9]；情况 2 不多见[10]；情况 3 有二[3]、[8]. 人们不尽会想，这三种情况利弊各如何？经过认真地研究分析，可以得出如下看法：

一、在情况 1 的定理 2 中，对偶规则里的对偶式求法符合关于对偶式定义 1. 从对偶规则

* 1992年4月2日收到.

是一个辅助推演规则这一观点出发，引用它可以简化证明，或者说，有了它，便可从一个已证的定理直接得到其对偶定理，扩大了定理的数目；利用它还能得出命题演算中基本永真式（永真等价式）除个别外常是成对出现的规律性．但是，对偶式定理（定理 1）的表述形式相对情况 2 或 3，显得不够精炼，应用起来也带来一定的麻烦．

二、在情况 2 的定理 4 中，对偶规则里的对偶式求法符合关于对偶式的定义 2，但对偶式求法与情况 1 是不同的．对偶式定理（定理 3）的表述相对情况 1，显然是简明的，应用起来也是方便的．利用对偶式定义（定义 2），可以断定：在含有两个变项的不同真值表的命题公式中，其中一半与另一半互为对偶式；也能确立大项和小项之间的关系，即 $m_j^*=M_j$ 或 $M_j^*=m_j$．至于对偶规则，当然也能起到辅助推演规的作用．但是，由于它，命题定律中成对出现这种规律性不复存在．

三、至于情况 3 定理 6，对偶规则里的对偶式求法不符合关于对偶式定义 3，这一点又与情况 1 和情况 2 不一样．正因为如此，情况 3 兼顾情况 1 和情况 2 之所长，我认为，这种做法为最佳，应按此处理．

## 参 考 文 献


［1］ J. P. Tremblay and R. Manohar 著，罗远铨、李盘林等译，离散数学结构及 其在计算机科学中的应用，上海科技出版社，1982. 4，P. 23－24.

［2］ 徐洁盘，离散数学导论，人民教育出版社，1982. 5，P. 198.

［3］ 王宪钧，数理逻辑引论，北京大学出版社，1982. 6，P. 65－67.

［4］ 左孝凌等，离散数学，上海科技文献出版社，1982. 9，P. 29.

［5］ 马振华，数学逻辑引论，清华大学出版社，1982. 12，P. 52－55.

［6］ 洪帆，离散数学基础，华中工学院出版社，1983. 2，P. 297－299.

［7］ 李盘林，数理逻辑和公理集合论基础，大连工学院出版社，1983. 7，P. 15－16.

［8］ S. C. Kleene 著，莫绍揆译，元数学导论，科学出版社，1984. 11，P. 128－131.

［9］ 王遇科，离散数学，北京工业学院出版社，1986. 1，P. 27－29.

［10］ 汪芳庭，数理逻辑，中国科学技术大学出版社，1990. 9，P. 53－54.