第12卷第4期 数学研究与评论 Vol. 12 No. 4
1992年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov. 1992

极小3边连通可折图*

韩 贞 耀
(辽宁师范大学数学系,大连 116022)

摘 要

本文证实了 Catlin[5] 和赖虹建[4]的猜想:设 G 是非平凡连通简化图,如果 $F(G)=2$,则 $G\in\{K_{2,t};t\geqslant 1\}$.

1 引 言

本文所讨论的图是有限的且不含有环. 凡未加说明的记号和术语都取之文[1]. 设 $R\subseteq V(G)$. 子图 $\Gamma\subseteq G$,如果① $G-E(\Gamma)$连通;② $v\in R$ 当且仅当 $d_\Gamma(v)$是奇数,则称 Γ 是 G 的一个 R-子图,如果$\forall\ R\subseteq V(G)$,$|R|$是偶数,G 都有 R-子图,则称图 G 是可折的. 约定 K_1 是可折的,并称为平凡的可折图. 如果 G 可折而 G 的任意非平凡真子图都不可折,则称 G 是极小可折图. 设 $H\subset G$,H 可折,称 H 是 G 的折子图. 如果不存在折子图 H' 使 $H\subset H'\subseteq G$,则称 H 是 G 的极大折子图. Catlin 证明了图 G 的每一个顶点都处于唯一的一个极大折子图中[2]. 设连通图 $H\subseteq G$. 在 G 中将 $E(H)$的每一条边都收缩并删去收缩后产生的环,这样得到的图称为 G 对 H 的收缩,记作 G/H,也称 G/H 是 G 的像,G 是 G/H 的原像. 图 G 的所有非平凡折子图都收缩后得到的图称为 G 的简化,记作 G'. 若 $G=G'$,则称 G 是简化的.

定理 1 (Catlin[2]) 设 G 是一个图,则

(i) G 是简化的当且仅当 G 没有非平凡折子图.

(ii) 如果 G 是简化的,那么$\forall\ H\subseteq G$,若 $H\notin\{K_1,K_2\}$则有 $|E(H)|\leqslant 2|V(H)|-4$.

(iii) 如果 G 是简化的,则 G 是简单的,不含 K_3,$\delta\leqslant 3$,且 G 至多由两个边不交的林就可复盖.

(iv) 设 H 是 G 的折子图,G 可折当且仅当 G/H 可折.

(v) 如果 G 有两个边不交的生成树,则 G 可折.

设 4 圈 $C_4=v_1v_2v_3v_4v_1\subset G$,用点 $\bar v_1$ 代替$\{v_1,v_3\}$,$\bar v_2$ 代替$\{v_2,v_4\}$,用非重边 $\bar v_1\bar v_2$ 代替 $E(C_4)$,使 $N(\bar v_1)=N\{v_1,v_3\}$,$N(\bar v_2)=N\{v_2,v_4\}$,这样从 G 得到的图用 G/π 表示,并称 C_4 是 G 的 π 可折子图. 这时也称 G/π 是 G 的像,G 是 G/π 的原像.

定理 2 (Catlin[3]) 设 H 是 G 的 π 可折子图,如果 G/π 可折则 G 可折.

* 1990年11月12日收到.

2 引 言 和 定 理

引理 1[2] 设 H_1、H_2 均是可折图，如果 $V(H_1)\cap V(H_2)\neq\varnothing$，则 $H_1\cup H_2$ 也可折.

引理 2 设 G 是 3 边连通图，$|E(G)|=2|V(G)|-4$，且任一满足 $|V(H)|<|V(G)|$ 的 G 的子图 H 都是简化的，那么如果 G 含 $K_{2,3}$，则 G 是可折的.

证明 设 $K_{2,3}$ 的顶点集的两分类 $V_1=\{u_1,u_2\}$，$V_2=\{v_1,v_2,v_3\}$. 因 $\delta\geqslant K'=3$，故若 $\{u_1v_2, u_1v_3, u_2v_2, u_2v_3\}$ 是 G 的边割，则 $E=\{u_1v_1, u_1v_2, u_2v_1, u_2v_2\}$ 不会是 G 的边割. 无妨设 E 不是 G 的边割，取 $C_4=u_1v_1u_2v_2u_1$. 考察图 G/π.

因 $|E(G/\pi)|=2|V(G/\pi)|-3$，故 G/π 不是简化的. 设 $\bar{G}=(G/\pi)'$. 如果 $\bar{v}_1\bar{v}_2\in E(\bar{G})$，则 G/π 的任一非平凡极大折子图必含 $\bar{v}_1$ 或 $\bar{v}_2$（否则该子图就是 G 的一个非简化的真子图），由引理 1 知 G/π 至多有两个非平凡极大折子图. 设 H_i 是 G/π 的非平凡极大折子图，则 $|E(H_i)|\leqslant 2|V(H_i)|-2$. 否则 H_i 的原像不是简化的. 由此导出 $|E(\bar{G})|\geqslant 2|V(\bar{G})|-3$. 若 $\bar{G}\notin\{K_1,K_2\}$，则 $\bar{G}$ 不是简化的，矛盾；若 $\bar{G}=K_2$，则 E 是 G 的边割，矛盾；故 $\bar{G}=K_1$. 则 G 是可折的. 如果 $\bar{v}_1\bar{v}_2\notin E(\bar{G})$，则 $\bar{v}_1\bar{v}_2$ 处于 G/π 的某个极大折子图 H 中，若 $H\neq G/\pi$，则 H 的原像可折，矛盾；若 $H=G/\pi$，则 $(G/\pi)'=\bar{G}=K_1$，由定理 1 与定理 2 知 G 可折.

设 T 是 G 的树，U 是 G 的林，U_1 是 U 的连通分支，$U_2=U-V(U_1)$，如果 $E(T)\cap E(U)=\varnothing$，$V(U_1)\subset V(T)$，$V(U_2)\supseteq V(T)-V(U_1)\neq\varnothing$，则称 T、U_1、U_2 是 G 的三元树，记作 (T,U_1,U_2).

引理 3 设 (T,U_1,U_2) 是简化图 G 的三元树，则 $\forall\ v\in V(U_1)$，G 都存在三元树 $(\bar{T},\bar{U}_1,\bar{U}_2)$ 使 $V(\bar{T})=V(T)$，$V(\bar{U}_1)=\{v\}$，且 $V(\bar{U}_1+\bar{U}_2)=V(U_1+U_2)$，$|E(\bar{U}_1+\bar{U}_2)|=|E(U_1+U_2)|$.

证明 若导出子图 $T[V(U_1)]$ 连通，则 $G[V(U_1)]$ 有两个边不交的生成树，由定理 1（V）知 $G[V(U_1)]$ 可折，矛盾. 从 $T-V(U_1)$ 中选分支 T_0 使 $|[V(T_0),V(U_1)]|\geqslant 2$. 设 $S_0=V(T_0)$；$T_1,T_2,\cdots,T_r$ 表示 $T-S_0$ 的 $r(\geqslant 2)$ 个分支. 设 $S_i=V(T_i)\cap V(U_1)$，用 u_it_i 表示 $[S_0,V(T_i)]$ 中的唯一边，其中 $u_i\in S_0$，$t_i\in S_i\subset V(U_1)$，$1\leqslant i\leqslant r$.

设 U_{11} 是包含 $\{t_1,\cdots,t_r\}$ 的 U_1 的最小子树，显然 U_{11} 的悬挂点属于 $\{t_1,\cdots,t_r\}$. 将 $E(U_{11})$ 中凡两端点属于同一 S_i 的边都收缩得到 U'_{11}，不妨设 t_1 是 U'_{11} 的悬挂点，则 t_1 也是 U_{11} 的悬挂点. 易见 $\exists\ xy\in E(U_{11})$ $(x\in S_1, y\notin S_1)$ 使 $\{t_1,x\}\subseteq V(U_{1x})$，$\{t_2,\cdots,t_r\}\subseteq V(U_{1y})$. 其中 U_{1x}，U_{1y} 是 U_1-xy 的两个分支. 设 C 是 $T+xy$ 的唯一圈，则 $\{t_1u_1, t_iu_i\}\subset E(C)$（假设 $y\in S_i$，$i\neq 1$）. 不妨设指定点 $v\in V(U_{1x})$. 令 $U'_1=U_{1x}$，$U'_2=U_2+U_{1y}+t_iu_i$，$T'=T+xy-t_iu_i$，则三元树 (T',U'_1,U'_2) 满足 $V(T')=V(T)$，$v\in V(U'_1)$，且 $V(U'_1+U'_2)=V(U_1+U_2)$，$|E(U'_1+U'_2)|=|E(U_1+U_2)|$. 因 $|V(U'_1)|<|V(U_1)|$ 且 G 的阶有限，故重复上述 T' 与 U'_1 的边交换过程可得结论.

注 如果不考虑指定点 v，而当 $|V(U_1)|>2$ 时，不妨设 $|V(U_{1y})|\leqslant|V(U_{1x})|$，则最终可得三元树 $(\bar{T},\bar{U}_1,\bar{U}_2)$ 满足 $V(\bar{T})=V(T)$，$|V(\bar{U}_1)|=2$ 且 $V(\bar{U}_1+\bar{U}_2)=V(U_1+U_2)$，$|E(\bar{U}_1+\bar{U}_2)|=|E(U_1+U_2)|$).

命题 设 G 是 3 边连通图，$|E(G)|=2|V(G)|-4$，如果 G 是简化的，则 G 不含割点.

证明 假定 G 有割点 t，设 $G-t$ 的分支为 $H_1,\cdots,H_r$ $(r\geqslant 2)$. 因 $\delta\geqslant 3$，故 $H_i\neq K_1$，于是 $|E(G[V(H_i)\cup\{t\}])|\leqslant 2(|V(H_i)|+1)-4$，导出 $|E(G)|=\sum_{i=1}^{r}|E(G)[V(H_i)\cup\{t\}]|\leqslant 2|V(G)|-6$，矛盾.

引理 4 设 G 是 3 边连通图，$|E(G)|=2|V(G)|-4$，如果 G 是简化的，则 $\forall\ v\in V(G)$，G 存在边不交的生成林 T,U 满足① $\omega(T)=\omega(U)=2$，② $T_2=K_2$，$V(U_1)=\{v\}$，$V(T_2)\subset V(U_2)$，其中 T_1、T_2、U_1、U_2 分别是 T、U 的分支.

证明 根据定理 1，设 T'、U' 是 G 的边不交的生成林，$T'+U'=G$. 由 $|E(G)|$ 推知 $\omega(T')+\omega(U')=4$. 假定 $\omega(T')=2$，T'_1、T'_2 是 T' 的分支. 因 G 连通，故 $\exists\ st\in E(U')$ 使 $s\in V(T'_1)$、$t\in V(T'_2)$. 于是 $T'+st$ 与 $U'-st$ 仍是 G 的边不交的生成林，其中 $\omega(U'-st)=3$. 因此不妨设 $\omega(T')=1$，$v\in V(V'_1)$，U'_1,U'_2,U'_3 是 U' 的分支. 三元树 $(T',U'_1,U'_2+U'_3)$ 满足引理 3 的条件，故存在三元树 (T,U_1,U_2+U_3) 使 $V(U_1)=\{v\}$，$\omega(T)=1$，T 与 $U=U_1+U_2+U_3$ 是 G 的边不交的生成林，U_1，U_2，U_3 是 U 的分支.

由命题知 $\exists\ xy\in E(T)$ 使 $x\in V(U_2)$，$y\in V(U_3)$，设 T_x，T_y 是 $T-xy$ 的分支，令 $\bar{U}_1=U_1$，$\bar{U}_2=U_2+U_3+xy$. 不妨假定 $V(U_1)\subset V(T_x)$，则 $(\bar{U}_2,T_y,T_x)$ 是满足引理 3 条件的三元树. 如果 $|V(T_y)|\geqslant 2$，则利用引理 3 的注可知存在三元树 $(\bar{U}'_2,T'_y,T'_x)$ 使 $V(\bar{U}'_2)=V(\bar{U}_2)$，$|V(T'_y)|=2$. 这时 $\bar{U}_1+\bar{U}'_2$ 与 $T'_x+T'_y$ 是满足引理结论的 G 的生成林.

假定 $|V(T_y)|=1$. 为简化记号，设 T、U 是 G 边不交的生成林，$\omega(T)=\omega(U)=2$，$V(U_1)=\{v\}$，$V(T_1)=\{v_0\}\subset V(U_2)$，其中 v 是指定点，T_1、T_2、U_1、U_2 分别是 T、U 的分支. 以下只要证明存在三元树 $(U'_2、T'_1、T'_2)$ 使 $V(U'_2)=V(U_2)$，$v\notin V(T'_1)$，$|V(T'_1)|\geqslant 2$ 即可.

设 T_2-v 的 $r(\geqslant 3)$ 个分支为 $T_{21},\cdots,T_{2r}$，$N(v)\cap V(T_{2i})=\{t_i\}$ $i=1,\cdots,r$. 由引理 2 知 G 不含 $K_{2,3}$，故 $\exists\ u\in V(T_{2j})$)（不妨设 $j=1$）使 $u\in N(v_0)$，$d_{T_2}(u,v)\geqslant 2$. 设 $(S_1,S_2)_H$ 表示图 H 中 s_1、s_2 两点间的路，U_{2u} 与 U_{2v_0} 表示 U_2-uv_0 的分支，其中 $u\in V(U_{2u})$.

情形 1 $t_1\notin V(U_{2u})$. 这时 $\exists\ xy\in E(u,t_1)_{T_{21}}$ 使 $x\in V(U_{2u})$，$y\in V(U_{2v_0})$. 设 C 是 U_2+xy 的唯一圈，则 $uv_0\in E(C)$. 令 $U'_2=U_2+xy-uv_0$，$T'=T-xy+uv_0$，则 T' 的分支之一（包含点 v_0 的一支）满足 $v\notin V(T'_1)$ 且 $|V(T'_1)|\geqslant 2$. $(U'_2,T'_1,T'-V(T'_1))$ 就是满足要求的三元树.

情形 2 $t_1\in V(U_{2u})$. 考察子树 U_{2u}. 如果 $\forall\ u_0\in V(U_{2u})$，路 $(u_0,v)_{T_2}$ 的内部顶点都属于 $V(U_{2u})$，则导出子图 $H=G[V(U_{2u})\cup\{v\}]$ 不是简化的（因 $|E(H)|=2|V(H)|-3$），矛盾. 设 $u_0\in V(U_{2u})$，$x\in V(u_0,v)_{T_2}$ 但 $x\notin V(U_{2u})$，不妨设 $u_0\in V(T_{2r})$. 设 $u_0u_1\cdots u_ku$ 是 $(u_0,u)_{U_2}$ 路，其中 $u_i\notin V(T_{2r})$，$\forall\ j\in\{0,1,\cdots,i-1\}$，$u_j\in V(T_{2r})$. 从路 $(u_{i-1},t_r)_{T_{2r}}$ 中选取一点 y 使 $y\notin V(U_{2u})$，不妨设 $u_{i-1}y\in E(T_{2r})$（如果不存在这种点 y 或 $yu_{i-1}\notin E(T_{2r})$，则类似情形 1 易得 T'_1）. 设 C 是 U_2+yu_{i-1} 的唯一圈，则 $E(u_{i-1},u)_{U_2}\subset E(C)$. 令 $T'_2=T_2-yu_{i-1}+u_iu_{i-1}$，$U'_2=U_2-u_iu_{i-1}+yu_{i-1}$，则 T'_2，U'_2 都仍是树，且 $V(T'_2)=V(T_2)$、$V(U'_2)=V(U_2)$. 用 U'_{2u} 表示 U'_2-uv_0 的一个分支，设 $u\in V(U'_{2u})$. 如果 $t_1\notin V(U'_{2u})$，则情形 1 出现，否则因 $|V(U'_{2u})|<|V(U_{2u})|$，重复上述边的交换过程，情形 1 总会出现，证毕.

引理 5[2] 设 $R\subseteq V(G)$，如果 G 有一个生成树 T 使 $G-E(T)$ 的每一个分支恰包含了 R 中偶数个点，则 G 有 R—子图.

称满足引理 5 结论的树 T 为 G 的 R—生成树.

定理 3 设 G 是 3 边连通图，若 $|E(G)|=2|V(G)|-4$，且 G 的任一满足 $|V(H)|<|V(G)|$ 的子图 H 都是简化的，则 G 可折.

证明 假定 G 是简化的. 对任意 $R\subseteq V(G)$，$|R|$ 是偶数，只要证得 G 有 R—生成树即可得出定理 3.

情形 1　$R=V(G)$. 由假定和题设知 G 满足引理 4 的条件. 设 T_1、T_2、U_1、U_2 的含义同引理 4, $V(U_1)=\{v\}$, v 是随意指定的一点.

设 T_1-v 的 $r(\geqslant 3)$ 个分支为 T_{1i}, $N(v)\cap V(T_{1i})=\{t_i\}$, $i=1,\cdots,r$. 设 $V(T_2)=\{u_1,u_2\}$. 如果存在 T_{1j} 使 $|V(T_{1j})|$ 是偶数, 则令 $U'=U_1+U_2+vt_j$, 于是 $G-E(U')$ 的三个分支 $T_2, T_{1j}, T_1-V(T_{1j})$ 各包含 R 中偶数个点, 由引理 5 知 U' 是 G 的 $R-$生成树. 以下假定 $|V(T_{1i})|$ 全是奇数, $1\leqslant i\leqslant r$.

如果存在 $xy\in E(U_2)$ $(x\in V(T_{1i}), y\in V(T_{1j})$ 使 t_i, t_j 分别属于 U_2-xy 的不同分支, 则 $U'=U_1+U_2-xy+\{vt_i, vt_j\}$ 是 G 的 $R-$生成树. 称具有这类性质的边为 U_2 的 A 类边. 以下假定 U_2 中不存在 A 类边.

设 U_3 是包含 $\{t_1,\cdots,t_r\}$ 的 U_2 的最小子树, 则 U_3 的悬挂点全属于 $\{t_1,\cdots,t_r\}$. 将 $E(U_3)$ 中凡两端点属于同一 $V(T_{1i})$ 的边都收缩得到树 U'_3. 则 U'_3 的悬挂点的原像(之一)必是 U_3 的悬挂点. 不妨假定 t'_1 是 U'_3 的悬挂点, 其原像属于 $V(T_{11})$, 则 t_1 是 U_3 的悬挂点. $\exists\ xy\in E(U_3)$ 使 $\{t_1, x\}\subseteq V(U_{2x})$, $\{t_2,\cdots,t_r\}\subseteq V(U_{2y})$, 其中 $x\in V(T_{11})$、$y\notin V(T_{11})$, U_{2x} 与 U_{2y} 是 U_2-xy 的分支. 因 U_2 没有 A 类边, 故 $y\in\{u_1,u_2\}$, 不失一般性, 设 $t_1u_1\in E(U_3)$. 设 $P=u_1s_1\cdots s_ku_2$ 是 $(u_1,u_2)_{U_2}$ 路.

情形 1.1　$E(U_3)\cup E(P)$ 中存在 u_1t_i, u_2s_k 使 $s_k\notin V(T_{1i})$ (或 u_1s_1、u_2t_i 使 $s_1\notin V(T_{1i})$), t_i 是 U'_3 的悬挂点, 则 $\overline{U}=U_1+U_2-\{u_1t_i, u_2s_k\}+\{u_1u_2, vt_i, vt_j\}$ 是 G 的 $R-$生成树 (假设 $s_k\in V(T_{1j})$).

情形 1.2　上述情形不出现, 则(不妨设) $t_ru_2\in E(U_3)$, 且 $E(P)\subset E(U_3)$, $s_1\in V(T_{1r})$, $s_k\in V(T_{11})$, 不妨假定 $s_2\in V(T_{1i})$ $i\neq 1$、r (若 $i=1$, 则 s_1s_2 是 A 类边). 设 U_{s_1}, U_{s_2} 是 $U_2-s_1s_2$ 的分支, 则 $\{t_r, t_i\}\subset V(U_{s_2})$. 从路 $(s_1, t_r)_{T_{1r}}$ 中可选到边 e 使 e 的两端分别处于 U_{s_1} 与 U_{s_2} 中. 设 T'_{1r} 是 $T_{1r}-e$ 包含 s_1 的分支, $T'_1=T_1-e+s_1s_2$. 若 $|V(T'_{1r})|$ 是奇数, 则 $T'-v$ 的分支 $T_{1i}+T'_{1r}+s_1s_2$ 含有偶数个点, 由前所述 G 有 $R-$生成树; 若 $|V(T'_{1r})|$ 是偶数, 则在 $T'=T_1+T_2-e+s_1s_2$ 与 $U'=U_1+U_2-s_1s_2+e$ 中出现情形 1.1.

情形 2　$|R|<|V(G)|$. 取 $v\in V(G)-R$, 设 T、U、T_1、T_2、U_1、U_2 的含义仍同引理 4. 因 U_2 是树, $u_1u_2\notin E(U_2)$, 故 $U_2-\{u_1,u_2\}$ 有 $d(u_1)+d(u_2)-3$ 个分支. 设这些分支为 $U_{00}, U_{11},\cdots,U_{1r}, U_{21},\cdots,U_{2k}$, $N(u_1)\cap V(U_{1i})=\{t_{1i}\}$ $i=1,\cdots,r$; $N(u_2)\cap V(U_{2i})=\{t_{2i}\}$ $i=1,\cdots,k$; $N(u_i)\cap V(U_{00})=\{t_{i0}\}$ $i=1,2$, 其中 $r=d(u_1)-2$, $k=d(u_2)-2$.

如果 $|V(U_{00})\cap R|$ 是偶数, 则 $T'=T-u_1u_2+\{t_{10}u_1, t_{20}u_2\}$ 是 $R-$生成树. 如果 $|V(U_{ij})\cap R|$ $(i\neq 0)$ 是偶数, 则 $T'=T+t_{ij}u_i$ 是 $R-$生成树. 以下假定 $|V(U_{ij})\cap R|$ 全是奇数.

若 $\{u_1,u_2\}\cap R=\varnothing$, 则 $r+k$ 是奇数. 不妨设 r 是奇数, 则 $T'=T+t_{20}u_2$ 是 G 的 $R-$生成树. 若 $|\{u_1,u_2\}\cap R|=1$, 不妨设 $u_1\in R$, 则 r, k 奇偶性相同. 若 r 是奇数, 令 $T'=T+t_{10}u_1$; 若 r 是偶数, 令 $T'=T+t_{20}u_2$, 则 T' 是 G 的 $R-$生成树. 若 $\{u_1,u_2\}\subseteq R$, 则同 $\{u_1,u_2\}\cap R=\varnothing$ 的讨论, G 仍有 $R-$生成树.

综上所述, G 总有 $R-$生成树, 定理 3 成立.

3 定理的应用

$F(G)$ 表示为使图 G 含有两个边不交的生成树所要加入 $E(G)$ 中的最少边数. $\mathrm{diam}(G)$ 表示图 G 的直径. 赖虹建在文[4]中提出下述猜想.

猜想 设 G 是非平凡连通简化图，如果 $F(G)=2$. 则 $\mathrm{diam}(G)=2$.

下述定理 4 是 Catlin 在文[5]中提出的猜想 2 的核心内容. 赖虹建证明了这个猜想与上述猜想等价[4].

定理 4 设 G 是非平凡连通简化图，如果 $F(G)=2$，则 $G\in\{K_{2,t};t\geqslant 1\}$.

证明 利用反证法. 假定 G 是满足条件的顶点数尽可能少的图，且 $G\notin\{K_{2,t};t\geqslant 1\}$. 设 $p=|V(G)|$，$q=|E(G)|$. 因 G 是简化的，故 $q\leqslant 2p-4$，因 $F(G)=2$，故 $q+2\geqslant 2(p-1)$，于是 $q=2p-4$.

如果存在 $v\in V(G)$ 使 $d(v)=1$，则 $|E(G-v)|=2|V(G-v)|-3$，这与 G 是简化的矛盾.

如果存在 $v\in V(G)$ 使 $d(v)=2$，易见 $F(G-v)$ 仍为 2. 假如 $G-v$ 不连通，设 G_1,G_2 是 $G-v$ 的分支，因 $|E(G_i)|\leqslant 2|V(G_i)|-4\ (i=1,2)$，故 $2p-4=q=\sum_{i=1}^{2}|E(G_i)|+2\leqslant 2p-8$，矛盾，因此 $G-v$ 连通. 显然 $G-v$ 是简化的. 因 K_3 与 $K_{3,3}-e\ (e\in E(K_{3,3}))$ 可折[6]，故 $G-v\neq K_{2,p-3}$. 因此 $G-v$ 也是反例. 这与 G 的阶尽可能小矛盾.

如果 $\delta\geqslant 3$. 设 V_1,V_2 是 $V(G)$ 的一个划分，记 $G_i=G[V_i]$. 因 $|E(G_i)|\leqslant 2|V_i|-4\ i=1,2$，故 $|[V_1,V_2]|\geqslant 4$. 因此 G 是 3 边连通的. 由定理 3 知 G 可折，又矛盾. 证毕.

参 考 文 献

[1] J. A. Bondy and U. S. R. Murty, 图论及其应用，吴望名等译，科学出版社，1984 年.

[2] P. A. Catlin, *A reduction method to find spanning eulerian subgraphs*, J. Graph Theory 12(1988) 29—45.

[3] P. A. Catlin, *Supereulerian graphs, collapsible graphs and four—cycles*, Congressus Numerantium, 58(1987) 233—246.

[4] Lai Hongjian, *Reduced graph of diameter two*, J. Graph Theory 14(1990) 77—87.

[5] P. A. Catlin, *Double cycle covers and petersen graph*, J. Graph Theory 13(1989) 465—483.

[6] 韩贞耀，超欧拉 3 边连通图的边数，辽宁师范大学学报，4(1991) 281—285.

Minimal 3-edge-connected Collapsible Graphs

Han Zhenyao

(Dept. Math., Liaoning Normal University)

Abstract

In this paper confirmes the following conjecture: Let G be a nontuimal connected reduced graph, if $F(G)=2$, then $G\in\{K_{2,t};t\geq 1\}$