第13卷第1期 数学研究与评论 Vol. 13 No. 1
1993年2月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Feb. 1993

关于轮图优美标号的性质*

黄 国 泰
(海南师范学院,海口 571158)

设 $G=(V(G),E(G))$ 为 p 个顶点,q 条边的连通简单图,以 x 和 y 为端点的边记作 (x,y).

定义 1 称 l 为 G 的一个优美标号,如果 l 是一个单射:$l:V(G)\to\{0,1,\cdots,q\}$ 使得对所有边 $(x,y)\in E(G)$,由 $\bar{l}(x,y)=|l(x)-l(y)|$ 所定义的函数是一个一一对应. 并称 $l(x)$ 为顶点 x 的优美值.

定义 2 如果 G 存在一个优美标号,那么称 G 为优美图.

[1]证明了:轮图 $W_{n+1}=K_1\odot C_n, n\geqslant 3$,都是优美的,中心的优美值可以是 0,也可以是 $2n$,但不能是 n. 其它情况是未解决的问题(见[2]). 本文通过对轮图 $W_{n+1}=K_1\odot C_n$ 的优美标号性质的讨论,从而给出了轮图中心的优美值排除取值的一些情况.

性质 1 若 l 是 $W_{n+1}=K_1\odot C_n, n\geqslant 6$,一个优美标号,且令 x_0 为 W_{n+1} 的中心,那么有 $l(x_0)\neq n-1$ 和 $l(x_0)\neq n+1$.

证明 我们记 $V(C_n)=\{x_1,\cdots,x_n\}$,且设 $(x_i,x_{i+1}),(x_n,x_1)\in E(C_n)$, $i=1,\cdots,n-1$. 假设存在优 美标号 l,使得 $l(x_0)=n-1$,并记 $l(C_n)=\{l(x)\,|\,x\in V(C_n)\}$. 因此,有 $\bar{l}(x_0,x_i)=|l(x_i)-l(x_0)|\leqslant n+1$, $i=1,\cdots,n$. 又由优美标号的定义知,两数 $n-1+i$ 和 $n-1-i(i=1,\cdots,n-1)$,至多有一数在 $l(C_n)$ 中,且必有 $0,2n\in l(C_n)$. 容易证明,这种优美标号是不存在的. 所以,$l(x_0)\neq n-1$.

往证:$l(x_0)\neq n+1$. 假设 W_{n+1} 存在一个优美标号 l,使得 $l(x_0)=n+1$. 定义 Q,$Q(x)=2n-l(x)$, $x\in V(W_{n+1})$. 显然,Q 也是 W_{n+1} 的一个优美标号. 且 $Q(x_0)=n-1$. 此时,发生矛盾. 所以,$l(x_0)\neq n+1$. □

注意,当 $n<6$ 时,性质 1 不成立.

性质 2 若 l 是 W_{n+1} 的一个优美标号,$n\geqslant 11$. 记 x_0 为 W_{n+1} 的中心,则 $l(x_0)\neq n-2$ 和 $l(x_0)\neq n+2$.

证明 假设 W_{n+1} 存在一个优美标号 l,使得 $l(x_0)=n-2$. 令 $V(C_n)=\{x_1,\cdots,x_n\}$. 且 $(x_1,x_n),(x_i,x_{i+1})\in E(C_n)$, $i=1,\cdots,n-1$. 从而有 $\bar{l}(x_0,x_i)=|l(x_0)-l(x_i)|\leqslant n+2$, $i=1,\cdots,n$. 又由 l 为优美标号知,两数 $n-2+i$ 和 $n-2-i$ 至多有一数在 $l(C_n)$ 中. 因此,分情况讨论,不难证明这种优美标号不存在. 所以得 $l(x_0)\neq n-2$. 仿照性质 1 的证明,易得 $l(x_0)\neq n+2$. □

综合上述性质,当 n 足够大时,W_{n+1} 的中心不能标 $n,n-1,n-2,n+1$ 和 $n+2$ 的优美值.

参 考 文 献

[1] R. L. Graham and N. L. A. Sloane, SIAMJ. Alg. Discrete Methods, 1(1980) 382—404.
[2] T. Grace, Journal of Graph Theory, 7(1983) 195—210.

* 1990年11月27日收到.