第13卷第1期 数学研究与评论 Vol. 13 No. 1
1993年2月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Feb. 1993

关于谢邦杰的一个定理的推广*

陶 跃 钢
(湖北教育学院数学系,武汉 430060)

本文采用[1]的术语.

1978年,谢邦杰[1]将著名的Hadamard不等式推广到四元数体上,即:设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 为四元数体上可中心化的非奇异矩阵,则

$$\|A\| \leqslant \sqrt{(\sum_{j=1}^{n}a_{1j}\bar{a}_{1j})\cdot(\sum_{j=1}^{n}a_{2j}\bar{a}_{2j})\cdot\cdots\cdot(\sum_{j=1}^{n}a_{nj}\bar{a}_{nj})} \tag{1}$$

等号成立当且仅当 A 的各行广义正交.本文给出关于四元数体上长方阵的不等式(2).当 $m=n$,且 A 是可中心化的非奇异矩阵时,(2)式即为(1)式.

定理 设四元数体上矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$,则

$$\|A\bar{A}'\| \leqslant (\sum_{j=1}^{n}a_{1j}\bar{a}_{1j})\cdot(\sum_{j=1}^{n}a_{2j}\bar{a}_{2j})\cdot\cdots\cdot(\sum_{j=1}^{n}a_{mj}\bar{a}_{mj}), \tag{2}$$

等号成立当且仅当 A 的各行广义正交.

定理的证明由下面的引理2立即可以得到.

引理1 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}=(A_{ij})_{s\times s}$ 是四元数体上正定自共轭矩阵,A_{ii} $(i=1,\cdots,s.)$ 是 n_i 阶主子块,$\sum_{i=1}^{s}n_i=n$.则

$$\|A\| \leqslant \|A_{11}\|\cdot\|A_{22}\|\cdot\cdots\cdot\|A_{ss}\|, \tag{3}$$

等号成立当且仅当 $A_{ij}=0, i\neq j, i,j=1,\cdots,s$.

证明 对 s 用归纳法.

当 $s=1$ 时,结论自然成立.假定 $k=1,\cdots,s-1$ 时结论成立.记 $A=\begin{pmatrix}A_{11} & B\\ \bar{B}' & D\end{pmatrix}$,其中

$$D=\begin{bmatrix}A_{22} & \cdots & A_{2s}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ A_{s2} & \cdots & A_{ss}\end{bmatrix},\quad B=(A_{12},\cdots,A_{1s}).$$

因为 A 是正定自共轭阵,所以 A_{11} 也是正定自共轭阵[2].因而 A_{11} 非奇异.于是,取

$$P=\begin{pmatrix}I_{n_1} & 0\\ -\bar{B}'A_{11}^{-1} & I_{n-n_1}\end{pmatrix},$$

作简单计算得

* 1991年3月29日收到.

$$PA\overline{P}' = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & D - \overline{B}'A_{11}^{-1}B \end{pmatrix}.$$

故

$$\| A \| = \| A_{11} \| \cdot \| D - \overline{B}'A_{11}^{-1}B \| \leqslant \| A_{11} \| \cdot \| D \|^{[3]}. \tag{4}$$

等号成立当且仅当 $B=0$. 由归纳假设,

$$\| D \| \leqslant \| A_{22} \| \cdot \cdots \cdot \| A_{ss} \|, \tag{5}$$

等号成立当且仅当 $A_{ij}=0, i\neq j,\ i,j=2,\cdots,s$. 由(4)式和(5)式即得(3)式. 证毕.

引理 2 设四元数体上矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}=(A_{ij})_{s\times t}$, 其中 A_{ij} 是 $m_i\times n_j (i=1,\cdots,s;\ j=1,\cdots,t.)$ 子块, $\sum_{i=1}^{s} m_i = m,\ \sum_{j=1}^{t} n_j = n$, 则

$$\| A\overline{A}' \| \leqslant \| \sum_{j=1}^{t} A_{1j}\overline{A}'_{1j} \| \cdot \| \sum_{j=1}^{t} A_{2j}\overline{A}'_{2j} \| \cdot \cdots \cdot \| \sum_{j=1}^{t} A_{sj}\overline{A}'_{sj} \|, \tag{6}$$

等号成立当且仅当 $\sum_{j=1}^{t} A_{ij}\overline{A}'_{kj} = 0, i\neq k,\ i,k=1,\cdots,s.$

证明 因 $A\overline{A}'$ 是自共轭阵, 故可中心化. 若 $A\overline{A}'$ 是奇异的, 则 $\| A\overline{A}' \| = 0$[4]. 但 $A\overline{A}'$ 半正定, 所以主子式 $\| \sum_{j=1}^{t} A_{ij}\overline{A}'_{ij} \| \geqslant 0,\ i=1,\cdots,s$[2]. 从而(6)式成立; 若 $A\overline{A}'$ 是非奇异的, 则 A 的秩必等于 A 的行数, 即 A 的行必左线性无关. 记 $B=A'$, 则 B 的列必左线性无关, 即 B 为左高矩阵. 又 $A\overline{A}'=B'\overline{B}$, 故 $A\overline{A}'$ 为正定自共轭阵[2]. 再由引理 1 便得(6)式. 证毕.

参 考 文 献

[1] 谢邦杰, Hadamard 定理在四元数体上的推广, 中国科学; 数学专辑(Ⅰ)(1979), 88—93.

[2] 谢邦杰, 四元数自共轭矩阵与行列式, 吉林大学自然科学学报, 2(1980), 19—35.

[3] 谢邦杰, 自共轭四元数矩阵的行列式的展开定理及其应用, 数学学报, 23: 5 (1980), 668—683.

[4] 谢邦杰, 任意体上可中心化矩阵的行列式, 吉林大学自然科学学报, 3(1980), 1—33.

On a Result of Xie Bangjie

Tao Yuegang

(Dept. of Math., Hubei College of Education, Wuhan)

Abstract

In this note, we show that if $A=(a_{ij})_{m\times n}$ is a matrix over skew field of quaternions, then

$$\|A\overline{A'}\| \leq (\sum_{j=1}^{n} a_{1j}\overline{a}_{1j}) \cdot (\sum_{j=1}^{n} a_{2j}\overline{a}_{2j}) \cdot \quad \cdots \quad \cdot (\sum_{j=1}^{n} a_{mj}\overline{a}_{mj}),$$

with equality holds if and only if the rows of A are all mutually orthogonal.