第13卷第1期
1993年2月
数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol. 13 No. 1
Feb. 1993

算子级数的无条件收敛*

钟怀杰

(福建师范大学数学系，福州 350007)

摘要

讨论 Banach 空间中算子级数的无条件收敛，分别在自反和含无条件基的条件下推广了 Vector 和 Gary 关于 Hilbert 空间的两个相应结果，即[1]的定理2和命题6，并且肯定回答了他们留下的问题.

引理1(Orlicz—Pettis 定理[2]) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$是 Banach 空间中的元素列，如果对正整数集 N 中的每一序列 $n_1<n_2<\cdots$，弱极限(w.) $\lim\limits_{m\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{m}x_{n_i}$ 都存在，那么对每一列 $n_1<n_2<\cdots$，范数极限(s.) $\lim\limits_{m\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{m}x_i$ 存在.

引理2([2]的V，定理8) 设 X 是 Banach 空间，则 X 不含与 c_0 同构子空间的充分必要条件是 X 中的每一弱无条件哥西级数都是弱无条件收敛级数.

定理1 设 X 是不含与 c_0 同构于空间的 Banach 空间，$K_n\in B(X)$，则 $\sum_{n\in N}K_n$ 在弱算子拓扑下无条件收敛等价于在强算子拓扑下无条件收敛.

其中 $B(X)$表示 X 上线性有界算子的全体.

证明 只需证 $\sum_{n\in N}K_n$ 在 W.O.T.(弱算子拓扑的简记)下无条件收敛时，也在 S.O.T.(强算子拓扑的简记)下无条件收敛.

对任一给定的 $x\in X$，和每一 $f\in X^*$，由 $\sum_{n\in N}K$ 按 W.O.T. 无条件收敛，数项级数 $\sum_{n\in N}f(K_nx)$ 无条件收敛，依经典黎曼定理 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|f(K_nx)|<\infty$，故而对每一序列 $n_1<n_2<\cdots$ 更有 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}|f(K_{n_i}x)|<\infty$，由 f 的任意性，$\sum_{i\in N}K_{n_i}x$ 是弱无条件哥西级数，依引理2，$\sum_{i\in N}K_{n_i}x$ 就是弱无条件收敛级数，从而$\{K_nx\}_{n=1}^{\infty}$是弱子级收敛的，再依引理1，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}K_nx$ 是范数子级数收敛的，此又等价于 $\sum_{n\in N}K_nx$ 是范数无条件收敛的. 再由 x 的任意性，已证得 $\sum_{n\in N}K_n$ 在 S.O.T. 下无条件收敛. 定理证毕.

推论1 如果 X 是自反的 Banach 空间，则 $B(X)$中的算子级数 $\sum_{n\in N}K_n$ 在 W.O.T. 下无条件收敛等价于在 S.O.T. 下无条件收敛.

---

* 1990年10月5日收到，福建省自然科学基金资助课题.

限度：对一般 Banach 空间未必成立.

例 取 $X=l_1$，$\{e_n\}$为其自然基，P_n是 X 到其一维子空间$[e_n]$上的自然投影，在 $X^*=l_1^*=l_\infty$ 中取 $f=(1,1,\cdots,1,\cdots)$，作 $K=f\otimes e_1\in K(X)$，最后令 $K_n=KP_n=f(P_n\cdot)e_1$.

可逐一验证 K_n 满足定理 2 设定的条件. 但是，$\sum_{n\in N}K_n$ 并不一致收敛于 K. 事实上，无论多大的 n，$\|\sum_{i=1}^{n}K_i-K\|\geqslant\|(\sum_{i=1}^{n}K_i-K)e_{n+1}\|=\|Ke_{n+1}\|=\|f(e_{n+1})e_1\|=\|e_1\|=1$.

以下工作旨在把[1]的命题 6 由 Hilbert 空间推广到含无条件基的 Banach 空间上去.

引理 3 设$\{e_n\}$是 Banach 空间 X 的无条件基，$\{f_n\}$是与$\{e_n\}$相应的系数泛函列，$\{a_n\}$是一有界复数列，则由 $Tx=\sum_{n=1}^{\infty}a_nf_n(x)e_n$，$x\in X$，所定义的算子 $T\in B(X)$，且

$$\sup\{|a_n|\}\leqslant\|T\|\leqslant\alpha\sup\{|a_n|\}.$$

其中 α 是基$\{e_n\}$的无条件常数，与$\{a_n\}$的选取无关，并且 $T\in K(X)$的充分必要条件是 $a_n\to0(n\to\infty)$.

定义 设$\{e_n\}$是 Banach 空间 X 中取定的无条件基，则称如上引理 3 中由有界数列$\{a_n\}$所确定的算子 T 为对角算子，并称由$\{|a_n|\}$所确定的算子为 T 的绝对值(算子)，记为$|T|$.

引理 4 设实或复数域上的无穷矩阵(a_{nm}) $n,m=1,2,\cdots$满足如下条件：

(a) 对每一固定的 m，$\sum_{n=1}^{\infty}a_{nm}$ 无条件收敛；

(b) 对每一指标集 $F\subset N$，$\lim_{m\to\infty}\sum_{n\in F}a_{nm}=0$. 则$\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}|a_{n,m}|=0$

定理 3 设$\{e_n\}$是 Banach 空间 X 的无条件基. 相应于基$\{e_n\}$，$\{T_n\}$是 X 上的对角紧算子序列，$\sum_{n\in N}T_n$ 在强算子拓扑下无条件收敛，并对每个指标集 $F\subset N$，$\sum_{n\in F}T_n\in K(X)$，那么 $\sum_{n=1}^{\infty}|T_n|$ 一致收敛.

证明 由于相应于无条件基$\{e_n\}$，每个对角紧算子 T_n 对应于一个数列$\{a_{nm}\}$，$\lim_{m\to\infty}a_{nm}=0$，容易验证，由$\{T_n\}$所确定的无穷矩阵$(a_{nm})$，由定理 3 所给各条件，相应地满足引理 4 的条件(a)和(b)，那么由引理 4 和 $\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}|a_{nm}|=0$. 这已蕴涵 $\lim_{k\to\infty}\sup_m\{\sum_{n=K+1}^{\infty}|a_{nm}|\}=0$，即 $\sum_{n=1}^{\infty}|T_n|$ 一致收敛，定理证毕.

参 考 文 献

[1] Vector K., Gary W., *A Riemann type theorem for unconditional convergence of operators*, Proc. Amer. Math. Soc 98:3(1986), 431—435.

[2] Diestel J., *Sequences and Series in Banach Spaces*, Springer—Verlag G. T. M. 92, 1984.

Unconditionally Convergent Series of Operators

Zhong Huaijie
(Dept. of Math., Fujian Teachers University, Fuzhou)

Abstract

We discuss unconditionally convergent series of operators in Banach spaces and extend some results of [1] to reflexive Banach spaces and Banach spaces either of which has a uncoditional basis, thus answering a question of [1].