第13卷第2期 1993年5月
数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol. 13 No. 2 May 1993

F. P. —维数的合冲定理*

李 元 林
(江苏工学院，镇江 212013)

§1 引言与记号

1984年，Ho Kuen Ng 在[1]中给出了交换环与模的有限表现维数(简称为 F. P. 一维数)的定义及若干有意义的重要结果. 从此，有限表现性的讨论成为环论的热门课题之一. 作者在[2]中将有限表现维数推广到非交换环上. 并利用有限表现维数刻划了凝聚环，在[3]中讨论了有限表现维数的换环定理. 在[4]中讨论了笛卡尔方形上的有限表现维数. 丁南庆在[5]中推广了有限表现维数，给出了一种新维数——模的有限生成维数，在[6]中讨论了有限表现模的对偶模. 在本文中，我们将讨论下面的问题：

设 R 为一个环，$R[x]$ 表示 R 上一元多项式环(x 是 R 上的交换未定元)，$R[x_1,\cdots,x_n]$ 为 R 上多元多项式环. 众所周知，对于环的整体维数 $GD(R)$，有著名的合冲定理

$$GD(R[x]) = GD(R) + 1;$$
$$GD(R[x_1,\cdots,x_n]) = GD(R) + n.$$

但是，对于环的有限表现维数(记为 $\mathrm{FP}D(R)$)，合冲定理在一般情况下显然不成立. 因为当 $\mathrm{FP}D(R)=0$ 时(即 R 为 Noethe 环时)，显然有 $R[x]$ 为 Noethe 环(Hilbert 基定理)，从而，$\mathrm{FP}D(R[x])=0$，①不成立. 我们自然要问什么时侯①式成立呢？本文将证明(定理 2.4)：当 $\mathrm{FP}D(R)>1$ 时(即 R 非 Noethez 环时)，有 $\mathrm{FP}D(R[x])\geqslant \mathrm{FP}D(R)+1$. 在定理 2.8 的假设下，反过来的不等式也成立. 从而合冲定理①成立.

下面简述环与模的左有限表现维数的定义.

定义 1.1 设 R 为环. $\forall\ M\in {}_R\mathfrak{M}$. M 的左有限表现维数记为 $\mathrm{fp}d_R(M)$ 或简记为 $\mathrm{fp}d(M)$)，定义如下：

$\mathrm{fp}d_R(M)=\inf\{n\mid$ 如果存在正合列$(*)\ P_{n+1}\to P_n\to\cdots\to P_0\to A\to 0$. 其中 P_i 均为投射模($i=0,1,\cdots,n+1$)，P_n,P_{n+1} 为有限生成模$\}$. 使达到下确界的上述$(*)$正合列称为 M 的有限表现分解. 若对任意的自然数 n，没有上面的正合列$(*)$，则定义：$\mathrm{fp}d_R(M)=\infty$.

定义 1.2 设 R 为环，则 R 的(左)有限表现维数记为 $\mathrm{FP}D(R)$，定义如下

$$\mathrm{FP}D(R) = \sup\{\mathrm{fp}d(M)\mid \forall\ M\in \mathrm{F.G}_R\mathfrak{M}\}.$$

若干记号：

$\mathrm{F.P}_R\mathfrak{M}$ 一环 R 的左有限表现模范畴；

* 1991年1月29日收到. 江苏工学院青年基金资助项目.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

$F.G_R\mathfrak{M}$—环 R 的左有限生成模范畴；

$\mathrm{Proj}_R\mathfrak{M}$—环 R 的左投射模范畴；

$\mathrm{Free}_R\mathfrak{M}$—环 R 的左自由模范畴；

$WD(R)$—环 R 的弱维数

$GD(R)$—环 R 的整体维数

其它记号及术语均可在[1]、[2]、[7]、[8]、[9]中找到. 本文所涉及的环均指有单位元的环，环同态均指保持单位元对应的环同态，所有的模如无特别声明均指左酉模.

§2 合冲定理

我们先给三条引理.

引理 2.1([3]引理 2.1) 设 R 为凝聚环，则

(1) 对一切自然数 n 有 $\mathrm{fp}d(\coprod_{i=1}^{n} M_i)=\sup_{1\leqslant i\leqslant n}\{\mathrm{fp}d(M_i)\}$，$\forall\ M_i\in {}_R\mathfrak{M}$；

(2) $\mathrm{fp}d(\coprod_{i\in I} M_i)\geqslant\sup_{i\in I}\{\mathrm{fp}d(M_i)\}$，$I$ 为指标集.

引理 2.2([3]引理 2.2) 设 R_1、R_2 为环，$f:R_1\to R_2$ 为环同态，且通过 f、R_2 成为有限表现的 R_1 模，则$\forall\ M\in {}_{R_2}\mathfrak{M}$，$M$ 为有限表现 R_2—模$\Leftrightarrow M$ 为有限表现的 R_1—模.

引理 2.3([1]定理 2.4) 设 R 为凝聚环，且有 R—模的正合列：$0\to M_1\to M_2\to M_3\to 0$. 记 $\mathrm{fp}d(M_i)=d_i$，$i=1,2,3$，则有

(1) $d_2\leqslant\sup(d_1,d_3)$；

(2) $d_3\leqslant\sup(d_2,d_1+1)$；

(3) $d_1\leqslant\sup(d_2,d_3-1)$.

设 R 为环，$R[x]$为 R 上一元多项式环，显然有环同态 $f_1:R\to R[x]$(嵌入环同态)，$f_2:R[x]\twoheadrightarrow R$(自然环同态，$f_2(\sum_{i=0}^{n}a_ix^i)=a_0$)，于是$\forall\ M\in {}_R\mathfrak{M}$，通过 f_2，M^* 成为 $R[x]$—模，记为${}_{R[x]}M$. $\forall\ M^*\in {}_{R[x]}\mathfrak{M}$，通过 f_1，M^* 成为 R—模，记为${}_RM^*$.

定理 2.4 设 R、$R[x]$为凝聚环，$\forall\ M\in {}_R\mathfrak{M}$，有

(1) 若 $\mathrm{fp}d_R(M)=0$，则 $\mathrm{fp}d_{R[x]}(M)=0$；

(2) 若 $\mathrm{fp}d_RM=n\geqslant 1$，则 $\mathrm{fp}d_{R[x]}M=n+1$.

从而又有

(3) 若 $\mathrm{FP}D(R)=0$，则有 $\mathrm{FP}D(R[x])=0$；

(4) 若 $0<\mathrm{FP}D(R)<+\infty$，则有 $\mathrm{FP}D(R[x])\geqslant\mathrm{FP}D(R)+1$.

证明 (1) 若 $\mathrm{fp}d_RM=0$(即 $M\in FP_R\mathfrak{M}$)，考虑自然环同态 $f:R[x]\twoheadrightarrow R$，则有 $R[x]$—模的正合列：

$$0\to R[x]\xrightarrow{i}R[x]\xrightarrow{\pi}R\to 0.\tag{2.1}$$

其中 $i(f_n(x))=f_n(x)x$，$\pi(f_n(x))=f_n(0)$，$\forall\ f_n(x)\in R[x]$. 于是，通过 f，R 成为有限表现的 $R[x]$—模，由引理 2.2，立得 $M\in F.P_{R[x]}\mathfrak{M}$，即 $\mathrm{fp}d_{R[x]}M=0$.

(2) 若 $\mathrm{fp}d_RM=n$ $(1\leqslant n<+\infty)$，我们将用数学归纳法证明 $\mathrm{fp}d_{R[x]}M=n+1$.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

① 设 $\mathrm{fp}d_R M=1$，先考虑一个非有限生成的自由 R－模 $F=\coprod R$，则类似于(2.1)式可得 $R[x]$－模正合列：

$$0\to F[x]\to F[x]\to F\to 0$$

其中，$F[x]=R[x]\otimes_R F$ 为自由 $R[x]$－模，于是有 $\mathrm{fp}d_{R[x]}F\leqslant 2$. 从而由引理 2.2 可得：$1\leqslant \mathrm{fp}d_{R[x]}F\leqslant 2$. 若 $\mathrm{fp}d_{R[x]}F=1$，则有 F(作为 $R[x]$－模)的有限表现分解：

$$0\to K^*\xrightarrow{i}P^*\xrightarrow{\pi}F\to 0.$$

其中，P^* 为非有限生成投射 $R[x]$－模，K^* 为有限表现的 $R[x]$－模，注意到$\forall\ p\in P^*,\pi(x\cdot p)=x\cdot\pi(p)=0,\pi(p)\in F,x\in a_{nn}(F)$)，于是 $x\cdot p\in i(K^*)$(以下将 $i(K^*)$ 与 K^* 等同看待). 选择 $Q^*\in\mathrm{Proj}_{R[x]}\mathfrak{M}$，使得 $P^*\oplus Q^*=F^*\in\mathrm{Free}_{R[x]}\mathfrak{M}$，因为 $K^*\in\mathrm{F.G}_{R[x]}\mathfrak{M}$，所以，存在 F^* 的一个直和分解 $F^*=F_1^*\oplus F_2^*$，其中 $K^*\subset F_1^*$. F_1^* 为有限生成的自由 $R[x]$－模，$F_2^*\in\mathrm{Free}_{R[x]}\mathfrak{M}$，又因为 P^* 为 F^* 的一个非有限生成的直和项，所以 $P^*\not\subset F_1^*$，故存在 $p_1\in P^*$ 使 $p_1\notin F_1^*$. 又设 F_1^* 和 F_2^* 的一组基分别为$(y_1,\cdots,y_k)$，$\{z_j\}_{j\in J}$，则 $p_1=\sum\limits_{i=1}^{k}\lambda_i'y_i+\sum\limits_{j\in J}\lambda_j''z_j$，其中 λ_j'' 不全为零. $\lambda_i',\lambda_j''\in R[x]$. 再由 $x\cdot p_1\in K^*\subset F_1^*$ 得：$\sum\limits_{i=1}^{k}k_i'y_i=x\cdot p_1=\sum\limits_{i=1}^{k}x\lambda_i'\,y_i+\sum x\lambda_j''z_j$，从而有 $x\lambda_j''=0,\forall\ j\in J$，而 x 为未定元，故有 $\lambda_j''=0$. 这与 p_1 的选择矛盾，因此 $\mathrm{fp}d_{R[x]}F\geqslant 2$，从而可得 $\mathrm{fp}d_{R[x]}F=2$. 类似地，当 $P^*\in\mathrm{Proj}_R\mathfrak{M}$，$P^*\notin\mathrm{F.G}_R\mathfrak{M}$，仿上可证 $\mathrm{fp}d_{R[x]}P^*\geqslant 2$. 又因为 P^* 为自由 $R[x]$－模 F^* 的直和项，由引理 2.1(1)可得：$\mathrm{fp}d_{R[x]}P^*\leqslant\mathrm{fp}d_{R[x]}F^*\leqslant 2$. 因此，$\mathrm{fp}d_{R[x]}P^*=2$.

设 $\mathrm{fp}d_R M=1$，考虑 M 的有限表现分解(R－模)

$$0\to K\to P\to M\to 0,$$

其中 $P\in\mathrm{Proj}_R\mathfrak{M}$，$K\in\mathrm{F.P}_R\mathfrak{M}$. 视其为 $R[x]$－模的正合列，则由上面的证明可知 $\mathrm{fp}d_{R[x]}K=0$，$\mathrm{fp}d_{R[x]}P=2$，再由引理 2.3 可得：$\mathrm{fp}d_{R[x]}M\leqslant 2$ 及 $\mathrm{fp}d_{R[x]}M\geqslant\mathrm{fp}d_{R[x]}P=2$，所以，$\mathrm{fp}d_{R[x]}M=2$.

② 设 $\mathrm{fp}d_R M=2$，则由引理 2.2 及上面的证明可知 $\mathrm{fp}d_{R[x]}M\geqslant 2$. 考虑 M 的有限表现分解：

$$0\to K\to P\to M\to 0,\tag{2.2}$$

其中 $P\in\mathrm{Proj}_R\mathfrak{M}$. $\mathrm{fp}d_R K=1$，于是 $\mathrm{fp}d_{R[x]}P\leqslant 2$，$\mathrm{fp}d_{R[x]}K=2$. 由引理 2.3(2)可得 $\mathrm{fp}d_{R[x]}M\leqslant 3$. 下证：$\mathrm{fp}d_{R[x]}M\neq 2$. 若 $\mathrm{fp}d_{R[x]}M=2$，则我们可作 $R[x]$－模的正合列：

$$0\to K^*\to F^*\to M\to 0,$$

其中 $F^*\in\mathrm{Free}_{R[x]}\mathfrak{M}$，$\mathrm{fp}d_{R[x]}K^*=1$. 从而又有 R－模的正合列：

$$0\to K^*/xF^*\to F^*/xF^*\to M\to 0,$$

由于 $\mathrm{fp}d_R M=2$，$F^*/xF^*\in\mathrm{Free}_R\mathfrak{M}$，故 $\mathrm{fp}d_R K^*/xF^*=1$. 作 K^* 的有限表现分解($R[x]$－模)

$$0\to K_1^*\to F_1^*\to K^*\to 0.$$

其中 $K_1^*\in\mathrm{F.P}_{R[x]}\mathfrak{M}$，$F_1^*\in\mathrm{Proj}_{R[x]}\mathfrak{M}$，由模同态定理可得 R－模的正合列

$$0\to K_1^*/xF_1^*\cap K_1^*\to F_1^*/xF_1^*\to K^*/xK^*\to 0,$$

其中 $F_1^*/xF_1^*\in\mathrm{Proj}_R\mathfrak{M}$，$K_1^*/xF_1^*\cap K_1^*\in\mathrm{F.P}_R\mathfrak{M}$，从而 $\mathrm{fp}d_R(K^*/xK^*)\leqslant 1$.

最后考虑 R－模的正合列

$$0\to xF^*/xK^*\to K^*/xK^*\to K^*/xF^*\to 0.$$

因为 $\mathrm{fp}d_R(K^*/xK^*)\leqslant 1$，$\mathrm{fp}d_R(K^*/xF^*)=1$，所以，$\mathrm{fp}d_R(xF^*/xK^*)\leqslant 1$. 又因为 x 为未定元，则有

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

$xF^*/xK^* \cong F^*/K^* \cong M$. 于是，$\mathrm{fpd}_R(M) \leqslant 1$，这与假设 $\mathrm{fpd}_{R[x]}(M)=2$ 矛盾. 因此. $\mathrm{fpd}_{R[x]}(M)=3$.

③ 归纳假设. 当 $\mathrm{fpd}_R(M)=n \geqslant 2$ 时，有 $\mathrm{fpd}_{R[x]}M=n+1$. 下设 $\mathrm{fpd}_R(M)=n+1$. 作 R—模的正合列：

$$0 \to K \to F \to M \to 0,$$

其中 $\mathrm{fpd}_R(K)=n$，$F \in \mathrm{Free}_R\mathfrak{M}$. 由归纳假设可知，$\mathrm{fpd}_{R[x]}(K)=n+1\,(>2)$，$\mathrm{fpd}_{R[x]}(F) \leqslant 2$，由引理 2.3 得，$\max\{\mathrm{fpd}_{R[x]}(F), \mathrm{fpd}_{R[x]}(M)-1\} \geqslant \mathrm{fpd}_{R[x]}(K)=n+1$. 因此，$\mathrm{fpd}_{R[x]}(M) \geqslant n+2$. 又 $\mathrm{fpd}_{R[x]}(M) \leqslant \max\{\mathrm{fpd}_{R[x]}(F)、\mathrm{fpd}_{R[x]}(K)+1\} \leqslant n+2$，从而，$\mathrm{fpd}_{R[x]}(M)=n+2$.

(3)、(4)是显然的.

注 1 从定理 2.4 的证明可见$\forall\ M \in {}_R\mathfrak{M}$，则 $\mathrm{fpd}_{R[x]}(M) \neq 1$.

推论 2.5 设 R、$R[x]$为凝聚环，且 $0<\mathrm{FPD}(R)<\infty$. 则 $\mathrm{FPD}(R[x]) \geqslant 3$.

证明 因为没有有限表现维数为 1 的环，故 $\mathrm{FPD}(R) \geqslant 2$，于是 $\mathrm{FPD}(R[x]) \geqslant 3$.

推论 2.6 设 R 为半局部凝聚环，$R[x]$为凝聚环，且 $0<\mathrm{FPD}(R)<+\infty$，则 $\mathrm{FPD}(R[x]) \geqslant 4$.

证明 因为没有有限表现维数为 2 的半局部环.

引理 2.7 设 R、$R[x]$为凝聚环，则

(1) $\forall\ M \in {}_R\mathfrak{M}$，$\mathrm{fpd}_{R[x]}M[x]=\mathrm{fpd}_RM$，其中 $M[x] \cong R[x] \otimes_R M$；

(2) $\forall\ M^* \in {}_{R[x]}\mathfrak{M}$，$\mathrm{fpd}_{R[x]}M^* \leqslant \mathrm{fpd}_RM^*+1$.

证明 由[3]定理 2.6 可知，仅需证明 $\mathrm{fpd}_{R[x]}M[x] \geqslant \mathrm{fpd}_RM$ 若 $\mathrm{fpd}_{R[x]}M[x]=0$，则有 $M[x]$ 的有限表现分解($R[x]$—模)

$$0 \to K^* \to F^* \to M[x] \to 0. \qquad (2.3)$$

其中 $F^* \in \mathrm{Proj}_{R[x]}\mathfrak{M}$，$F^* \in \mathrm{F.\,G}_{R[x]}\mathfrak{M}$，$K^* \in \mathrm{F.\,P}_{R[x]}\mathfrak{M}$，进而有 R—模的正合列：

$$0 \to K^*/(xF^* \cap K^*) \to F^*/xF^* \to M[x]/xM[x] \to 0,$$

其中 $F^*/xF^* \in \mathrm{Proj}_R\mathfrak{M}$，$F^*/xF^* \in \mathrm{F.\,G}_R\mathfrak{M}$，$K^*/(xF^* \cap K^*) \in \mathrm{F.\,P}_R\mathfrak{M}$. 从而 $\mathrm{fpd}_R(M[x]/xM[x])=0$，又 $M[x]/xM[x] \cong M$，因此，$\mathrm{fpd}_RM=0$.

若 $\mathrm{fpd}_{R[x]}M[x]=1$，仿上可证 $\mathrm{fpd}_RM \leqslant 1$.

下设 $\mathrm{fpd}_{R[x]}M[x]=n \geqslant 2$. 若 $n=\infty$，则结果显然，下面不妨设 $n<\infty$)

考虑 R—模正合列：

$$0 \to K_{n-2} \to F_{n-2} \to \cdots \to F_0 \to M \to 0, \qquad (2.4)$$

其中 $F_i \in \mathrm{Proj}_R\mathfrak{M}$，$i=0,1,\cdots,n-2$.

与 $R[x]$作张量积，可得 $R[x]$—模的正合列：

$$0 \to R[x] \otimes K_{n-2} \to R[x] \otimes F_{n-2} \to \cdots \to R[x] \otimes F_0 \to R[x] \otimes M \to 0,$$

即

$$0 \to K_{n-2}[x] \to F_{n-2}[x] \to \cdots \to F_0[x] \to M[x] \to 0, \qquad (2.5)$$

其中 $F_i[x] \in \mathrm{Proj}_{R[x]}\mathfrak{M}$ $(i=0,1,\cdots,n-2)$，由有限表现维数的维数转移定理可得 $\mathrm{fpd}_{R[x]}K_{n-2}[x]=1$. 从而 $\mathrm{fpd}_RK_{n-2} \leqslant 1$，再由(2.4)可知 $\mathrm{fpd}_RM \leqslant n$，即 $\mathrm{fpd}_{R[x]}M[x] \geqslant \mathrm{fpd}_RM$. 因此，$\mathrm{fpd}_{R[x]}M[x]=\mathrm{fpd}_RM$.

注 2 由引理 2.7 可知：若 $\mathrm{FPD}(R)=\infty$，则 $\mathrm{FPD}(R[x])=\infty$，于是，定理 2.4、推论 2.5、推

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

论 2.6 中关于 $\mathrm{FP}D(R)<\infty$ 的假设均可去掉.

定理 2.8（*FP*—维数的合冲定理） 设 R、$R[x]$ 为凝聚环.

（Ⅰ） 若下列三个条件之一成立

（1） 若存在一个有限生成的 $R[x]$—模 M^*，使得 $\mathrm{fp}d_{R[x]}M^*=\mathrm{FP}D(R[x])$，且 M^* 视为 R—模是有限生成的(即 $M^*\in \mathrm{F.G}_R\mathfrak{M}$)；

（2） 若存在循环 $R[x]$—模 (a^*)，使得 $\mathrm{fp}d_{R[x]}(a^*)=\mathrm{FP}D(R[x])$ 且 $(a^*)\in \mathrm{F.G}_R\mathfrak{M}$；

（3） 若存在一个循环 $R[x]$—模 (a^*)，使得 $\mathrm{fp}d_{R[x]}(a^*)=\mathrm{FP}D(R[x])$ 且存在一个首么多项式 $f_n(x)\in R[x]$ 使 $f_n(x)\in a_{nn}[a^*]$ 即 $f_n(x)\cdot a^*=0$. 则我们有 $\mathrm{FP}D(R[x])\leqslant \mathrm{FP}D(R)+1$. 从而当 $\mathrm{FP}D(R)>0$ 时，又有 $\mathrm{FP}D(R[x])=\mathrm{FP}D(R)+1$.

（Ⅱ） 若下列二条件之一成立

（4） 若存在一个循环 $R[x]$—模 (a^*)，使得 $\mathrm{fp}d_{R[x]}(a^*)=\mathrm{FP}D(R[x])$ 且 $\forall\ f_n(x)\in R[x]$，$f_n(x)\neq 0$，则有 $f_n(x)\notin a_{nn}(a^*)$；

（5） 若存在一个循环 $R[x]$—模 (a^*)，使得 $\mathrm{fp}d_{R[x]}(a^*)=\mathrm{FP}D(R[x])$ 且 $\forall\ f_n(x)\in R[x]$，$\partial f_n(x)\geqslant K\ (K\in N)$，则有 $f_n(x)\notin a_{nn}(a^*)$. 则 $\mathrm{FP}D(R[x])=0$. 即 $R[x]$ 为 Noether 环. 从而又有 R 为 Noether 环.

证明 （Ⅰ） 我们证明(3)⇒(2)⇒(1).

若(3)成立即存在 $f_n(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}r_ix_i$，其中 $r_i\in R$，$r_n\in R^\circ$，使得 $f_n(x)\cdot a^*=0$. 对任意的多项式 $g_m(x)\in R[x]$，因为 $f_n(x)$ 的首项系数为一可逆元，所以可作多项式带余除法， 于是有 $g_m(x)=q_s(x)+r_k(x)$，$q_s(x)$，$r_k(x)\in R[x]$，$\partial r_k(x)<n$. $\forall\ M^*\in(a^*)$，有 $M^*=g_m(x)a^*=(q_s(x)f_n(x)+r_k(x))a^*=r_k(x)a^*\in(Ra^*+R\cdot a^*x+\cdots+Ra^*x^{n-1})\subset R[x]\cdot a^*=(a^*)$. 因此，$(a^*)\in \mathrm{F.G}_RM$，(3)⇒(2).

(2)⇒(1)显然.

若(1)成立，由引理 2.7(2)，立得 $\mathrm{FP}D(R[x])\leqslant \mathrm{FP}D(R)+1$. 若又有 $\mathrm{FP}D(R)>0$，由定理 2.4 得 $\mathrm{FP}D(R[x])=\mathrm{FP}D(R)+1$.

（Ⅱ） 若(5)式成立，$\forall\ f_n(x)\in R[x]$，$f_n(x)\neq 0$. 则有 $x^kf_n(x)\notin a_{nn}(a^*)$，从而 $f_n(x)\notin a_{nn}(a^*)$ ⇒(4)，(4)⇒(5)显然. 故(4)⇔(5).

现设(4)成立，则 (a^*) 为一自由 $R[x]$—模且有 $(a^*)\cong R[x]$，于是 $\mathrm{FP}D(R[x])=0$，从而 $\mathrm{FP}D(R)=0$ 即 R 为 Noether 环.

定理 2.9 设 R、$R[x]$ 为凝聚环，若下列两条件之一成立

（1） $WD(R)<GD(R)$；

（2） $\mathrm{FP}D(R)=GD(R)+1$.

则有 $\mathrm{FP}D(R[x])=\mathrm{FP}D(R)+1$.

证明 显然(1)⇒(2)，当 $\mathrm{FP}D(R)=GD(R)+1$ 时，我们有 $GD(R[x])=GD(R)+1=\mathrm{FP}D(R)$，从而 $\mathrm{FP}D(R[x])\leqslant GD(R[x])+1=\mathrm{FP}D(R)+1$. 又因为此时 $\mathrm{FP}D(R)>0$，由定理 2.4 得 $\mathrm{FP}D(R)+1\leqslant \mathrm{FP}D(R[x])$. 从而有 $\mathrm{FP}D(R[x])=\mathrm{FP}D(R)+1$.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

参 考 文 献

[1] HO Kuen Ng, *Finitely presented dimension of commutative rings and modules*, Pacific. J. Math. 133(2)(1984), 417—431.

[2] 李元林，有限表现维数与凝聚环，数学杂志，No. 2(1993).

[3] 李元林，有限表现维数的换环定理，南京大学学报数学半年刊(1990)，75—84.

[4] 李元林，笛卡尔方形上的有限表现维数，南京大学学报数学半年刊(1992)，102—112.

[5] 丁南庆，模的有限生成维数，南京大学学报数学半年刊(1989)，107—111.

[6] 丁南庆，特殊模的对偶模，数学研究与评论 Vol. 10(3)(1990)，337—340.

[7] 周伯埙，同调代数，科学出版社，1988.

[8] J. J. Rotman, *An Introdoction to Homological Algebra*, Academic Press, 1979.

[9] F. W. Anderson. & K. R. Fuller, *Rings and Categories of Modules*, New York, Springer—Verlag 1974.

Syzygy Theory of F.P.-Dimension

Li Yuanlin

(Jiangsu Institute of Technology, Zhenjiang)

Abstract

Let R be a ring with 1, $R[x]$ be the polynomial ring of R. We compute the F.P.-Dimension of the polynomial ring $R[x]$. We get the syzygy theorem of F.P.-Dimension of R. i.e., $\mathrm{FPD}[R[x]] = \mathrm{FPD}[R] + 1$.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.