第13卷第3期 数学研究与评论 Vol. 13 No. 3
1993年8月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Aug. 1993

关于解析算子值函数的几个结果*

朱 健 民
(国防科技大学,长沙 410073)

§1 引 言

关于复值解析函数 Riesz—Dunford 积分的 Ky Fan 定理由[1]推广到算子值解析函数,由此函数论中的很多定理得到了推广. 本文的目的在于改进[1]中的结果,得到了较弱条件下的 Pick 定理,从而推广了[2]中的 Julia 引理,并简化了其证明过程.

设 H 为复的 Hilbert 空间,$L(H)$表示 H 上的一切有界线性算子组成的 Banach 代数. 对于 $L(H)$中的自伴算子 A 和 B,$A\geqslant B$ 意为 $A-B$ 为正定的,即$((A-B)x,x)>0$ 对所有 $x\in H$ 成立. 若 $A\geqslant B$ 且 $A-B$ 可逆,则记为 $A>B$. 另外,对 $T\in L(H)$,T 的实部定义为 $\mathrm{Re}T=\frac{1}{2}(T^*+T)$. 设 D 为复平面上的区域,$A_H(D)$表示定义在 D 上而取值于 $L(H)$中的算子值解析函数全体. 设 $f\in A_H(D)$,$T\in L(H)$且 $\sigma(T)\subset D$,定义 $L(H)$中的算子

$$f(T)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)(zI-T)^{-1}dz,$$

其中 Γ 为 D 中包含 $\sigma(T)$的正向围道.

§2 关于Ky Fan 定理

[1]将复值解析函数的 Ky Fan 定理推广成:

定理 A 设 $\Delta=\{|z|<1\}$,$f\in A_H(\Delta)$且 $\|f(z)\|<1(z\in\Delta)$. 又设 $T\in L(H)$,$\|T\|<1$ 且 T 与 f 可换,并有 (i) $f(z)$对所有 $z\in\Delta$ 正规且逐点可换;或者 (ii) T 为正规算子,则均成立 $\|f(T)\|<1$.

[1]在证明此定理时以算子的谱表示定理为工具,并用到了 Ky Fan 的结果,作者在[6]中用较直接的方法证明了定理 A 的前部分. 下面的定理为定理 A 的推广:

定理 1 设 $f\in A_H(\Delta)$满足 $\|f(z)\|<1$,$T\in L(H)$使得 T 和 T^* 与 f 可换,且 $\|T\|<1$,则有 $\|f(T)\|<1$.

此定理最近发表在[5]中,但作者曾得到相同结果(未发表),且证明方法与[5]不同. 设 $T\in L(H)$,$\|T\|<1$,记

$$P(T,e^{i\theta})=(1-e^{-i\theta}T^*)^{-1}(1-T^*T)(1-e^{i\theta}T)^{-1},\ \theta\in[0,2\pi].$$

* 1991年5月6日收到.

显然 $P(T,e^{i\theta})>0$ 且

$$\|P(T,e^{i\theta})\| = \frac{1}{2}\|(1-e^{i\theta}T^*)^{-1}(1+e^{i\theta}T^*)+(1+e^{-i\theta}T)(1-e^{-i\theta}T)^{-1}\|$$

$$= \|1+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(e^{ik\theta}T^{*k}+e^{-ik\theta}T^k)\| \leqslant (1+\|T\|)(1-\|T\|)^{-1}.$$

为证定理 1 需如下引理：

引理 设 $\Omega=\{|z|<1+\delta\}$ $(\delta>0)$，$g\in A_H(\Omega)$，$T\in L(H)$，$\|T\|<1$ 且 T 和 T^* 与 g 可换. 若 $\mathrm{Re}\,g(z)\geqslant 0$ $(z\in\Omega)$，则 $\mathrm{Re}\,g(T)\geqslant 0$.

证明 我们只需证明

$$\mathrm{Re}\,g(T) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P(T,e^{i\theta})\mathrm{Re}[g(e^{i\theta})]d\theta. \tag{1}$$

设 $g(z)$ 在原点有 Taylor 展开式

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty}B_n z^n, \quad z\in\Omega.$$

取 r：$1<r<1+\delta$，由 Cauchy 不等式[3, p. 97]有

$$\|B_n\| \leqslant M(r)r^{-n},\ n=0,1,2,\cdots,$$

其中 $M(r)=\max\limits_{|z|=r}\|f(z)\|$. 对 $L(H)$ 上任何范数为 1 的连续线性泛函 φ，有

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{n=0}^{N}\varphi(B_nP(T,e^{i\theta}))e^{in\theta}d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{n=0}^{N}[\varphi(B_n)+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(\varphi(B_nT^{*k}e^{ik\theta}+\varphi(B_nT^k)e^{-ik\theta})]e^{in\theta}d\theta$$

$$= \sum_{n=0}^{n}\varphi(B_nT^n).$$

记 $h(T)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}g(e^{i\theta})P(T,e^{i\theta})d\theta$，由于

$$|\varphi(h(T)-\sum_{n=0}^{N}B_nT^n)| = |\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{n>N}\varphi(B_nP(T,e^{i\theta})e^{in\theta}d\theta|$$

$$\leqslant (1+\|T\|)(1-\|T\|)^{-1}\sum_{n>N}^{\infty}\|B_n\|$$

$$\leqslant (1+\|T\|)(1-\|T\|)^{-1}M(r)\sum_{n>N}^{\infty}r^{-n}\to 0\ (N\to\infty),$$

因此有 $\lim\limits_{N\to\infty}\|h(T)-\sum_{n=0}^{N}B_nT^n\|=0$，即 $h(T)=\sum_{n=0}^{\infty}B_nT^n=g(T)$，于是 $g(T)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}g(e^{i\theta})P(T,e^{i\theta})d\theta$，由此有 $g(T)^*=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P(T,e^{i\theta})g(e^{i\theta})^*d\theta$，因为 T 和 T^* 均与 g 可换，所以 $g(e^{i\theta}P(T,e^{i\theta})=P(T,e^{i\theta})g(e^{i\theta})$. 综上(1)式获证.

定理 1 的证明

若 $\|T\|<r<\rho<1$，令 $\max\limits_{|z|=\rho}\|f(z)\|=1-\delta$ $(0<\delta<1)$，作函数 $F(z)=(1-\frac{\delta}{2})^{-1}f(rz)$，记 $\Omega=\{|z|<\frac{1}{\rho}\}$，则 $F\in A_H(\Omega)$，且 $\|F(z)\|<1$ $(z\in\Omega)$. 又令 $G(z)=(1+F(z))(1-F(z))^{-1}$. 周

知 $G\in A_H(\Omega)$ 且 $\mathrm{Re}\,G(z)>0$ $(z\in\Omega)$，对 $T'=\frac{T}{r}$ 应用引理有 $\mathrm{Re}\,G(T')\geqslant 0$. 而由[1]之引理 2.3 有 $G(T')=(1+F(T'))(1-F(T'))^{-1}$. 注意 $\mathrm{Re}\,G(T')\geqslant 0$ 与 $\|F(T')\|\leqslant 1$ 是等价的，因此有 $\|F(T')\|\leqslant 1$，或者 $\|f(T)\|\leqslant 1-\frac{\delta}{2}<1$. 证毕.

注 由定理 1 可将[1]中的 Von Neumann 定理、最大模原理和 Schwarz 引理进行推广[5].

§3 关于 Pick 定理

对 $X\in L(H)$，$\|X\|<1$，记 $A_X=I-X^*X$，$B_X=I-XX^*$. 引进特征函数

$$W_X(z)=A_X^{-\frac{1}{2}}(z-X)(I-X^*z)^{-1}A_X^{\frac{1}{2}}.$$

显然 $W_X(z)\in A_H(\Delta)$，且对 $T\in L(H)$：$\|T\|<1$，有 $\|W_X(T)\|<1$ ([4]).

定理 2 设 $f\in A_H(\Delta)$，$\|f(z)\|<1$ $(z\in\Delta)$，$T\in L(H)$ $(\|T\|<1)$ 且 T 和 T^* 与 f 可换. 若 $N\in L(H)$ $(\|N\|<1)$ 为正规算子且与 T 和 f 可换，则

$$\|W_{f(N)}[f(T)]\|\leqslant\|(T-N)(1-N^*T)^{-1}\|. \tag{2}$$

证明 作函数 $\mu_N(z)=(z+N)(1+N^*z)^{-1}$，$z\in\Delta$，$\mu_N(z)\in A_H(\Delta)$ 且 $\|\mu_N(z)\|<1$ $(z\in\Delta)$. 由定理 1 知 $\|f\circ\mu_N(z)\|<1$，$\|f(N)\|<1$. 令 $F(z)=W_{f(N)}[f\circ\mu_N(z)]$，则 $F\in A_H(\Delta)$，$\|F(z)\|<1$ $(z\in\Delta)$ 且 $F(0)=0$. 令 $C=(T-N)(1-N^*T)^{-1}$，则 $\|C\|<1$ 且 C 和 C^* 与 $F(z)$ 可换. 由 Schwarz 引理[5]有 $\|F(C)\|\leqslant\|C\|$. 注意 $\mu_N(C)=T$，从而(2)式获证.

推论 3 在定理 2 的条件下有

$$\begin{aligned}&\|A_{f(N)}^{-\frac{1}{2}}(1-f(N)^*f(T))A_{f(T)}^{-1}(1-f(T)^*f(N))A_{f(N)}^{-\frac{1}{2}}\|\\&\leqslant\|(1-N^*T)A_N^{-1}A_T^{-1}(1-T^*N)\|.\end{aligned} \tag{3}$$

证明 沿用定理 2 证明中的记号，有

$$\begin{aligned}\text{不等式(3)左边}&=\|(1-F(C)^*F(C))^{-1}\|=(1-\|F(C)\|^2\|)^{-1}\\&\leqslant(1-\|C\|^2)^{-1}=\|(1-C^*C)^{-1}\|=\text{(3)式右边}.\end{aligned}$$

于是(3)式获证.

注 定理 2 可视为[1]中 Pick 定理的推广，在那里要求 $f(z)$ 对每个 $z\in\Delta$ 正规且逐点可换.

§4 关于 Julia 引理

由推论 3 可得算子值解析函数的 Julia 引理：

定理 4 设 $f(z)\in A_H(\Delta)$，$\|f(z)\|<1$ $(z\in\Delta)$. 又设 $\{N_n\}$ 为 $L(H)$ 中的正规算子序列，使

(i) N_n $(n=1,2,\cdots n)$ 均与 f 可换；

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}\|I-N_n\|=0$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\|I-f(N_n)\|=0$；

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty}\|A_{f(N_n)}\|(1-\|N_n\|^2)^{-1}=\alpha$，

若有 $T\in L(H)$，$\|T\|<1$ 且 T 和 T^* 与 f 和 N_n $(n=1,2,\cdots)$ 可换，则

$$\|(I-f(T))(I-f(T)^*f(T))^{-1}(I-f(T)^*)\|\leqslant a\|(I-T)(I-T^*T)^{-1}(I-T^*)\|. \quad (4)$$

证明 首先注意

$$A^{-1}_{f(N_n)}\geqslant \|A_{f(N_n)}\|^{-1}I, \quad (5)$$

这是因为 $A_{f(N_n)}\leqslant\|A_{f(N_n)}\|I$ 及 $A^{-1}_{f(N_n)}\geqslant I$. 于是由(5)式有

$$\begin{aligned}&\|A^{-\frac{1}{2}}_{f(N)}(I-f(N_n)^*f(T))A^{-1}_{f(T)}(I-f(T)^*f(N_n))A^{-\frac{1}{2}}_{f(N)}\|\\ &=\|A^{-\frac{1}{2}}_{f(T)}(I-f(T)^*f(N_n))A^{-1}_{f(N_n)}(I-f(N_n)^*f(T))A^{-\frac{1}{2}}_{f(T)}\|\\ &\geqslant\|A_{f(N_n)}\|^{-1}\|(I-f(N_n)^*f(T))A^{-1}_{f(T)}(I-f(T)^*f(N_n))\|,\end{aligned}$$

因此由推论 3 及 $\|A_{N_n}^{-1}\|=(1-\|N_n\|^2)^{-1}$有

$$\begin{aligned}&\|(I-f(N_n)^*f(T))A^{-1}_{f(T)}(I-f(T)^*f(N_n))\|\\ &\leqslant\|A_{f(N_n)}\|(I-\|N_n\|^2)^{-1}\|(I-N_n^*T)(I-T^*T)^{-1}(I-T^*N_n)\|. \quad (6)\end{aligned}$$

令 $n\to\infty$由(ii)和(iii)便得(4)式. 证毕.

推论 5 若将定理 4 的条件(iii)换成$\lim\limits_{n\to\infty}\|aI-A_{f(N_n)}A_{N_n}^{-1}\|=0$, 且 $C=\liminf\limits_{n\to\infty}\|A_{N_n}\|\cdot\|A_{N_n}^{-1}\|<+\infty$, 则

$$\|(I-f(T))(I-f(T)^*f(T))(I-f(T)^*)\|\leqslant aC\|(I-T)(I-T^*T)^{-1}(I-T^*)\|. \quad (7)$$

证明 由于 $\|A_{f(N_n)}\|\leqslant\|A_{f(N_n)}A_{N_n}^{-1}\|\,\|A_{N_n}\|$, 所以由(6)令 $n\to\infty$便得(7)式.

注 上述推论即为[2]中的主要结果, 但我们这里将 $f(z)$的条件减弱, 并简化了原证明.

参 考 文 献

[1] Tao, Z. G., *Analytic Operator Functions*, J. Math. Anal. Appl., 103(1984), 393—320.

[2] Tao, Z. G., *Julia's lemma for analytic operator functions*, Chin. Ann. of Math., 9B:2(1988), 156—160.

[3] E. Hille, and R. S. Philips, *Functional Analysis and Semi—Groups*, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1957.

[4] T. Ando, and Ky Fan, *Pick—Julia theorems for operators*, Math. Z., 168(1979), 23—34.

[5] 陈公宁, 关于 Von Neumann—Heinz 定理与 Ky Fan 定理的推广, 数学年刊, 11A:3(1990), 314—320.

[6] 朱健民, 解析算子值函数的 Riesz—Dunford 积分, 数学研究与评论, 10(1990), 611—614.

Some Results about Analytic Operator Functions

Zhu Jiamin

(National Univ. of Defence Tech., Changsha)

Abstract

The Ky Fan's theorem about Riesz-Dunford integral for complex valued analytic functions of a complex variable has been extended to analytic operator functions by Tao [1]. The aim of this paper is to generalize Tao's results in [1] and [2] such as Ky Fan's theorem, Pick's theorem and Julia's lemma.