第13卷第3期 数学研究与评论 Vol. 13 No. 3
1993年8月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Aug. 1993

# 完备Riemann流形与球面的等距*

郑 永 凡
(辽宁大学数学系,沈阳 110036)

## §1 引 言

研究Riemann流形的球面特征是一个颇有兴趣的问题,特别是考虑完备Riemann流形 $M$ 在什么条件下与一球面等距.为此,Obata[1][2]曾得到两个微分方程组,证明它们在 $M$ 上非常数解的存在性等价于 $M$ 与一个球面等距,其中一个方程组解的存在与共形向量场的存在有关.人们由此给出 $M$ 在紧致情况下很多解的存在条件(如[3]).而另一个是下面的(也见[4]).

**定理A** 设 $M$ 为 $n$ 维完备、连通、单连通的Riemann流形,则下列微分方程组

$$\nabla_j\nabla_i\varphi_k + k(2\varphi_j g_{ik} + \varphi_i g_{jk} + \varphi_k g_{ji}) = 0,\quad k = \text{const.} > 0, \tag{1.1}$$

在 $M$ 上有非平凡解 $\varphi$ 的充要条件是 $M$ 与 $(n+1)$ 维欧氏空间中半径为 $1/\sqrt{k}$ 的球面等距,其中 $\varphi_i = \nabla_i\varphi$.

注意到若 $\varphi$ 是(1.1)的非平凡解,则梯度 $\nabla\varphi$ 一定是射影向量场,于是人们关心容有射影向量场的Riemann流形与球面等距的条件,即寻求(1.1)的解.Hiramatu[4]证得:若 $M$ 是紧致单连通具常数量曲率的并且容有一非仿射的射影向量场的Riemann流形,则 $M$ 与一球面等距.考虑到应用定理A,本文的目的是将上述结果推广到完备流形的情况,即得到下面的定理.

**定理** 设 $M$ 为 $n$ 维完备、连通具非零常数量曲率 $r$ 的Riemann流形,若 $M$ 容有一非仿射的射影向量场 $X$ 使得 $X$ 和梯度 $\nabla \operatorname{div} X$ 在 $M$ 上平方可积,则 $\operatorname{div} X$ 是(1.1)的一个非平凡解,此时 $k = r/n(n-1)$;若 $M$ 是单连通的,则 $M$ 与一球面等距.

## §2 局部公式

设 $M$ 为 $n(\geqslant 2)$ 维连通的Riemann流形,采用局部坐标,它的度量张量是 $g=(g_{ji})$,用 $\nabla$ 表示它的Riemann联络其系数为 $\{{}^{h}_{ji}\}$.分别用 $K=(K_{kji}{}^{h})$,$R=(R_{ji})$ 和 $r$ 表示 $M$ 的曲率张量,Ricci张量和数量曲率.一个向量场 $X$ 称为射影向量场即它满足(采用求和约定)

$$\mathscr{L}_X\{{}^{h}_{ji}\} = \nabla_j\nabla_i X^h + X^k K_{kji}{}^{h} = \delta^h_j\rho_i + \delta^h_i\rho_j, \tag{2.1}$$

其中 $\rho_i$ 为某1-形式的分量,这里 $\mathscr{L}_X$ 表示李导数算子.由(2.1)易知,$\nabla_j\delta X = -(n+1)\rho_j$,其中 $\delta$ 是余微分算子($\delta X = -\nabla_i X^i$)[3].可见 $\rho_i$ 是梯度,令 $\rho = -\delta X/(n+1)$,则 $\rho_i = \nabla_i\rho$.从(2.1)也能得到

* 1991年4月3日收到.1992年11月17日收到修改稿.

$$\nabla_j \mathscr{L}_X g_{ih} = \nabla_j(\nabla_i X_h + \nabla_h X_i) = 2\rho_j g_{ih} + \rho_i g_{jh} + \rho_h g_{ji}. \tag{2.2}$$

特别，当 $\delta X = \text{const.}$ 时，射影向量场 $X$ 称为仿射向量场.

令

$$G_{ji} = R_{ji} - \frac{r}{n} g_{ji}, \tag{2.3}$$

$$P^h_{kji} = K^h_{kji} - \frac{1}{n-1}(\delta^h_k R_{ji} - \delta^h_j R_{ki}), \tag{2.4}$$

则张量 $G=(G_{ji})$ 是对称的且 $\langle G,g\rangle=0$，其中 $\langle,\rangle$ 表示由度量 $g$ 定义的局部内积，$P=(P^h_{kji})$ 是 Wely 射影曲率张量它满足

$$P^h_{kji} = -P^h_{jki},\ P^t_{tji} = 0,\ P^t_{kjt} = 0, \tag{2.5}$$

$$P^h_{kji} g^{ji} = \frac{n}{n-1} G^h_k, \tag{2.6}$$

其中 $(g^{ji})$ 是 $(g_{ji})$ 的逆，$G^h_k = G_{kt} g^{th}$. 若 $X$ 是射影向量场，则 $\mathscr{L}_X P = 0$.

如果 $M$ 的数量曲率 $r$ 为常数，由 $\delta R = -\frac{1}{2} dr = 0$ 可得

$$\nabla^k P^h_{kji} = \frac{n-2}{n-1} \nabla^h G_{ji} - \nabla_i G^h_j. \tag{2.7}$$

定义向量场 $\xi$ 为

$$\xi^h = \frac{n-1}{2} \rho^h + \frac{r}{n} X^h, \tag{2.8}$$

注意到若 $X$ 是射影向量场，则[3] $\mathscr{L}_X R = -(n-1)\nabla d\rho$，于是

$$\mathscr{L}_X G_{ji} = -\nabla_j \xi_i - \nabla_i \xi_j = -L_\xi g_{ji}. \tag{2.9}$$

本文约定，向量场与其关于度量 $g$ 的对偶 1－形式采用同一符号表示.

## §3 一个引理

设 $M$ 为 $n$ 维完备、连通的 Riemann 流形，$\sigma$ 是 $M$ 上到某定点的距离函数，则 $\sigma$ 是一致 Lipschitz 连续函数，令

$$B_t = \{p \in M \mid \sigma(p) \leqslant t\}, \quad t > 0, \tag{3.1}$$

则在 $M$ 上存在 Lipschitz 连续函数 $w_t$ 满足：(1) $0 \leqslant w_t(p) \leqslant 1, p \in M$；(2) $w_t(p)=1, p \in B_t$；(3) $\operatorname{supp} w_t \subset B_{2t}$；(4) $w_t \to 1$ $(t \to \infty)$. 存在与 $t$ 无关的正常数 $C$ 使得

$$|dw_t| \leqslant \frac{C}{t} \tag{3.2}$$

在 $M$ 上几乎处处成立[6][8].

**引理** 设 $M$ 为 $n$ 维完备、连通的 Riemann 流形，$\varphi$ 是(1.1)的一个非平凡解，其中 $k=$ const.，若 $d\varphi$ 平方可积，则 $k$ 一定非负.

**证明** 设 $\varphi$ 是(1.1)的非常数解，可得

$$\nabla(\Delta\varphi - 2(n+1)k\varphi) = 0, \tag{3.3}$$

其中 $\Delta$ 为 Laplace 算子 $(\Delta\varphi = -\nabla^t\nabla_t\varphi)$，于是 $\Delta\varphi - 2(n+1)k\varphi = \text{const} = C$. 因为若 $\varphi$ 满足引

理条件，则“$\varphi$+任意常数”亦满足，所以可以假设 $C=0$，即

$$\Delta\varphi = 2(n+1)k\varphi. \tag{3.4}$$

由于

$$\delta(w_t^2\varphi d\varphi) \overset{\text{a.e.}}{=} -w_t^2\langle d\varphi, d\varphi\rangle + w_t^2\langle\varphi, \Delta\varphi\rangle + \langle w_t\varphi d\varphi, 2dw_t\rangle, \tag{3.5}$$

在测地球 $B_{2t}$ 上积分之并运用 Stokes 定理（它对 Lipschitz 微分形式适用），注意到在 $\partial B_{2t}$ 上 $w_t=0$，可得

$$\|w_t d\varphi\|^2_{B_{2t}} - 2(n+1)k\|w_t\varphi\|^2_{B_{2t}} - 《w_t\varphi d\varphi, 2dw_t》_{B_{2t}} = 0, \tag{3.6}$$

这里 $《\ ,\ 》_{B_{2t}} = \int_{B_{2t}}\langle\ ,\ \rangle dv$，由于 $\mathrm{supp}w_t \subset B_{2t}$，因此(3.6)可改写为

$$\|w_t d\varphi\|^2 - 2(n+1)k\|w_t\varphi\|^2 - 《w_t\varphi d\varphi, 2dw_t》 = 0, \tag{3.7}$$

其中 $《\ ,\ 》 = \int_M\langle\ ,\ \rangle dv.$

如果 $k<0$，由 Schwarz 不等式和(3.2)有

$$|《w_t\varphi d\varphi, 2dw_t》| \leqslant \|w_t\varphi\| \cdot |《2dw_t, d\varphi》| \leqslant \|w_t\varphi\| \cdot \frac{2C}{t}\|d\varphi\|$$

$$\leqslant [-(n+1)k\|w_t\varphi\|^2 - \frac{4C^2}{(n+1)kt^2}\|d\varphi\|^2]. \tag{3.8}$$

于是从(3.7)得

$$0 \leqslant \|w_t d\varphi\|^2 - (n+1)k\|w_t\varphi\|^2 \leqslant -\frac{4C^2}{(n+1)kt^2}\|d\varphi\|^2. \tag{3.9}$$

令 $t\to\infty$，由 $\|d\varphi\|^2<\infty$ 知存在 $0 \leqslant \|d\varphi\|^2 - (n+1)k\|\varphi\|^2 \leqslant 0$，这表明在 $M$ 上 $\varphi=0$，矛盾. 因此必有 $k \geqslant 0$.

## §4 定理的证明

用算子 $\mathscr{L}_X$ 作用(2.6)得

$$\frac{n}{n-1}\mathscr{L}_X G^k_k - P^k_{kji}\mathscr{L}_X g^{ji} = (\mathscr{L}_X P^k_{kji})g^{ji} = 0, \tag{4.1}$$

再由算子 $-\delta$ 作用(4.1)，运用(2.7)并注意到 $\mathscr{L}_X g^{ji} = (-\nabla^j X^i + \nabla^i X^j)$，可得下面等式

$$-\frac{n}{n-1}\langle\delta\mathscr{L}_X Q, \xi\rangle + \frac{n-2}{n-1}\langle\nabla G, \xi\otimes\mathscr{L}_X g\rangle - \langle\nabla G, \mathscr{L}_X g\otimes\xi\rangle + \frac{n}{n-1}\langle G, d\rho\otimes\xi\rangle = 0, \tag{4.2}$$

其中已设 $Q=(G^k_k)$，向量场 $\xi$ 如(2.8)所定义.

容易证明下列等式

$$\langle\delta\mathscr{L}_X Q, \xi\rangle = \langle\delta\mathscr{L}_X G, \xi\rangle + 3\langle G, d\rho\otimes\xi\rangle = -\langle\mathscr{L}_X\nabla G, g\otimes\xi\rangle = \langle\nabla G, \mathscr{L}_X g\otimes\xi\rangle. \tag{4.3}$$

利用上述关系，(4.2)可变为

$$\langle\delta\mathscr{L}_X G, \xi\rangle - (n-3)\langle G, d\rho\otimes\xi\rangle - (n-2)\langle\nabla G, \xi\otimes\mathscr{L}_X g\rangle = 0. \tag{4.4}$$

用 $w_t^2$ 乘以两端并在 $M$ 上取积分

$$\langle\!\langle w_t\delta\mathscr{L}_X G, w_t\xi\rangle\!\rangle - (n-3)\langle\!\langle w_t G, w_t d\rho\otimes\xi\rangle\!\rangle - (n-2)\langle\!\langle w_t\nabla G, w_t\xi\otimes\mathscr{L}_X g\rangle\!\rangle = 0. \tag{4.5}$$

计算向量场 $w_t^2\langle G,\mathscr{L}_X g\rangle\xi$ 的散度并积分之，应用(2.2)，可得

$$\langle\!\langle w_t\nabla G, w_t\xi\otimes\mathscr{L}_X g\rangle\!\rangle = -2\langle\!\langle w_t G, w_t d\rho\otimes\xi\rangle\!\rangle + 2\|w_t\delta\xi\|^2 - 4\langle\!\langle w_t\delta\xi\cdot dw_t,\xi\rangle\!\rangle. \tag{4.6}$$

计算向量场 $w_t^2 i_\xi\mathscr{L}_X G$ 的散度并积分之，应用(2.9)可得

$$\langle\!\langle w_t\delta\mathscr{L}_X G, w_t\xi\rangle\!\rangle = -\frac{1}{2}\|w_t\mathscr{L}_\xi g\|^2 - \langle\!\langle w_t\mathscr{L}_\xi g, 2dw_t\otimes\xi\rangle\!\rangle, \tag{4.7}$$

其中 $i_\xi$ 是关于向量场 $\xi$ 的内积算子.

运用关系

$$\Delta\rho = \delta\left(\frac{2}{n-1}\xi - \frac{2r}{n(n-1)}X\right) = \frac{2}{n-1}\delta\xi - \frac{2r}{n(n-1)}\delta X,$$

计算 $w_t^2\Delta\rho\cdot\xi$ 的散度并积分之得

$$\langle\!\langle w_t d\Delta\rho, w_t\xi\rangle\!\rangle = \frac{2}{n-1}\|w_t\delta\xi\|^2 - \frac{2r}{n(n-1)}\langle\!\langle w_t\delta X, w_t\delta\xi\rangle\!\rangle$$
$$-\frac{4}{n-1}\langle\!\langle\delta\xi\cdot dw_t, w_t\xi\rangle\!\rangle + \frac{4r}{n(n-1)}\langle\!\langle\delta X dw_t, w_t\xi\rangle\!\rangle. \tag{4.8}$$

运用关系 $\delta X = -(n+1)\rho$ 和 $\delta\mathscr{L}_X g = -(n+3)d\rho$，注意到(2.8)和(4.8)，计算 $w_t^2\delta X\cdot\xi$ 的散度并积分之可得

$$\langle\!\langle w_t G, w_t d\rho\otimes\xi\rangle\!\rangle = \frac{2}{n-1}\|w_t\delta\xi\|^2 - \frac{1}{n-1}\langle\!\langle w_t\delta\mathscr{L}_\xi g, w_t\xi\rangle\!\rangle - \frac{4}{n-1}\langle\!\langle\delta\xi\cdot dw_t, w_t\xi\rangle\!\rangle, \tag{4.9}$$

其中利用了对数量 $\rho$ 的恒等式

$$\nabla^j\nabla_j\rho_i - R_{ji}\rho^j + \nabla_i\Delta\rho = 0.$$

计算向量场 $w_t^2 i_\xi\mathscr{L}_\xi g$ 的散度并积分，结合(4.9)，可得

$$\langle\!\langle w_t G, w_t d\rho\otimes\xi\rangle\!\rangle = \frac{2}{n-1}\|w_t\delta\xi\|^2 - \frac{1}{2(n-1)}\|w_t\mathscr{L}_\xi g\|^2 - \frac{1}{n-1}\langle\!\langle w_t\mathscr{L}_\xi g, 2dw_t\otimes\xi\rangle\!\rangle$$
$$-\frac{4}{n-1}\langle\!\langle w_t\delta\xi\cdot dw_t,\xi\rangle\!\rangle, \tag{4.10}$$

这样利用(4.6)，(4.7)和(4.10)，可将(4.5)变为

$$\|w_t\mathscr{L}_\xi g\|^2 + 2(n-3)\|w_t\delta\xi\|^2 + 4\langle\!\langle w_t\mathscr{L}_\xi g, dw_t\otimes\xi\rangle\!\rangle - 4(n-3)\langle\!\langle w_t\delta\xi\cdot dw_t,\xi\rangle\!\rangle = 0. \tag{4.11}$$

由 Schwarz 不等式和(3.2).

$$4|\langle\!\langle w_t\mathscr{L}_\xi g, dw_t\otimes\xi\rangle\!\rangle| \leqslant \|w_t\mathscr{L}_\xi g\|\cdot\frac{4C}{t}\|\xi\| \leqslant \frac{1}{2}\left(\|w_t\mathscr{L}_\xi g\|^2 + \frac{16C^2}{t^2}\|\xi\|^2\right),$$

$$4|\langle\!\langle w_t\delta\xi g\cdot dw_t,\xi\rangle\!\rangle| \leqslant \|w_t\delta\xi\|\cdot\frac{4C}{t}\|\xi\| \leqslant \frac{1}{2}\left(\|w_t\delta\xi\|^2 + \frac{16C^2}{t^2}\|\xi\|^2\right),$$

于是从(4.11)可得积分不等式

$$\frac{1}{2}\|w_t\mathscr{L}_\xi g\|^2 + \frac{3}{2}(n-3)\|w_t\delta\xi\|^2 \leqslant \frac{8(n-2)C^2}{t^2}\|\xi\|^2. \tag{4.12}$$

令 $t\to\infty$，则成立下面的(由定理条件知 $\|\xi\|^2<\infty$)

$$\frac{1}{2}\|\mathscr{L}_\xi g\|^2 + \frac{3}{2}(n-3)\|\delta\xi\|^2 \leqslant 0. \tag{4.13}$$

如果 $n>2$,(4.13)表明在 $M$ 上 $\mathscr{L}_\xi g=0$,即由(2.8)定义的 $\xi$ 是 Killing 向量场,从[5]中的引理 3 知 $\delta X$ 是(1.1)的解.这时 $k=r/n(n-1)$.再利用引理和定理 A 即可证明定理的第二部分.如果 $n=2$,则 $G\equiv0$,由(2.9),此时 $\xi$ 仍为 Killing 向量场,于是定理得证.

**注** (1) 定理中 $X$ 和 $\nabla\delta X$ 在 $M$ 上平方可积条件可放松为 $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{1}{t^2}\|X\|^2_{B_{2t}}=0$ 和 $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{1}{t^2}\|\nabla\delta X\|^2_{B_{2t}}=0$(参见[7]).(2) 当 $M$ 为紧致时,平方可积条件和数量曲率非零性自然成立,因此,我们的定理推广了[5]中的结果.

## 参 考 文 献


[1] M. Obata, J. Math. Soc. Japan, 14(1962), 333—340.

[2] M. Obata, Proc. U. S. —Japan Seminar in Diff. Geo., Kyoto, Japan, 1965, 101—114.

[3] K. Yano, *Intergral Formulas in Riemannian Geometry*, Marcel Dekker, New York, 1970.

[4] S. Tanno, J. Math. Soc. Japan, 30(1978), 509—531.

[5] H. Hiramatu, Kodai Math. J. 3(1980), 397—406.

[6] S. T. Yau, Indiana Univ. Math. J. 25(1976), 659—670.

[7] M. Rigoli & I. M. C. Salawessa, Math. Z., 196(1987), 293—300.

[8] 陈省身、陈维桓,微分几何讲义,北京大学出版社,1983.


# Isometry of a Complete Riemannian Manifold to a Sphere


*Zheng Yongfan*

(Dept. of Math., Liaoning University, Shenyang)



### Abstract

We give certain conditions for a complete Riemannian manifold admitting a projective vector field to be isometric to a sphere.