第13卷第3期 1993年8月
数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol. 13 No. 3 Aug. 1993

体上可中心化矩阵的几个定理*

黄礼平 (湘潭矿业学院基础课部,湖南 4112010)
何向明 (湖南醴陵市第十三中学,412200)

摘 要

本文证明了:设 A,B 是体 K 上矩阵,A 可中心化,B 相似于中心上三角阵,则 K 上矩阵 $D=\begin{pmatrix}A & C\\ 0 & B\end{pmatrix}$ 可中心化,且 $\|D\|=\|A\|\,\|B\|$. 由这个结果本文得到可中心化矩阵的几个性质.

§1 引 言

文[1]定义了任意体上可中心化(即满足中心化条件的)矩阵及其弱特征多项式与特征值等概念,文[2]定义了体上可中心化矩阵 A 的行列式 $\|A\|$. 但是,由定义[1]判断矩阵是否可中心化是很困难的,因此寻找可中心化矩阵的类型就成为一个重要的问题. 文[2~4]就四元数矩阵给出了一些结果,本文给出了体上可中心化矩阵的一种类型,并证明了一个半正定自共轭四元数矩阵与一个自共轭四元数矩阵的乘积是可中心化的,以及可中心化矩阵的几个性质.

在本文中,设 K 为任意一个体,F 是 K 的中心. 称主对角线上元素均在 F 中的体 K 上的上(下)三角形矩阵为 K 上中心上(下)三角阵.

§2 体上可中心化矩阵的一种类型

定理 1 体 K 上 n 阶中心上(下)三角阵可中心化,且其弱特征多项式为

$$f(\lambda)=\prod_{i=1}^{n}(\lambda-a_i), \tag{1}$$

其中 $a_i\in F$ 为主对角线上元素,$1\leqslant i\leqslant n$.

仿照[3]中定理 7 的证明方法,对 n 用数学归纳法,不难证明定理 1(从略).

定理 2 设 A 为体 K 上 m 阶可中心化矩阵,B 为 K 上相似于一个中心上三角阵的 n 阶矩阵,则 K 上矩阵

$$D=\begin{pmatrix}A & C\\ 0 & B\end{pmatrix} \tag{2}$$

可中心化,且 D 的弱特征多项式为 A 与 B 的弱特征多项式之积,并且有

* 1991年5月18日收到. 1993年5月8日收到修改稿.

$$\|D\| = \|A\|\,\|B\|. \tag{3}$$

证明 不妨设 B 为 K 上中心上三角阵，对 B 的阶数 n 用数学归纳法. 设

$$\lambda I_m - A \cong \mathrm{diag}(1,\cdots,1,\varphi_1(\lambda),\cdots,\varphi_s(\lambda)), \tag{4}$$

其中 $\varphi_i(\lambda)$ 均为 F 上首 1 多项式且 $\varphi_1|\cdots|\varphi_s$. 记 A 的弱特征多项式为 $f(\lambda)=\prod_{i=1}^{s}\varphi_i(\lambda)$.

当 $n=1$ 时，$B=(b_1)$. 仿照[3]中定理 7 的证明方法，不难证明

$$\lambda I_{m+1} - D \cong \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \varphi_1(\lambda) & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \varphi_s(\lambda) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{m-1} \end{pmatrix} \\ 0 & \lambda - b_1 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

其中 $c_i=1$ 或 0，$1\leqslant i\leqslant m-1$. 因为上式右边矩阵为 $F[\lambda]$上矩阵，故显然 D 可中心化. 又由域上矩阵与行列式理论易知 D 的弱特征多项式为 $f(\lambda)(\lambda-b_1)$且(3)成立.

假设对 $n-1$ 的情况命题成立($n\geqslant 2$). 则对于 n 阶中心上三角阵 $B=\begin{pmatrix} B_1 & * \\ 0 & b_n \end{pmatrix}$，由归纳假设知 $D_1=\begin{pmatrix} A & C_1 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix}$可中心化，从而 $\lambda I_{m+n-1}-D_1\cong\mathrm{diag}(1,\cdots,1,\psi_1(\lambda),\cdots,\psi_t(\lambda))$，其中 $\psi_i(\lambda)$均为 F 上首 1 多项式且 $\psi_1|\cdots|\psi_t$，且 D_1 的弱特征多项为 $f(\lambda)\prod_{i=1}^{n-1}(\lambda-b_i)=\prod_{i=1}^{t}\psi_i(\lambda)$. 因此，仿照[3]中定理 7 的证明方法，不难证明

$$\lambda I_{m+n} - D \cong \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \psi_1(\lambda) & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \psi_t(\lambda) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{m-1} \end{pmatrix} \\ 0 & \lambda - b_n \end{pmatrix}, \tag{6}$$

其中 $c_i=0$ 或 1，$i=1,\cdots,m-1$. 因此 D 可中心化，且显然 D 的弱特征多项式为

$$\prod_{i=1}^{t}\psi_i(\lambda)(\lambda-b_n)=f(\lambda)\prod_{i=1}^{n}(\lambda-b_i). \tag{7}$$

故由定理 1 知 D 的弱特征多项式为 A,B 的弱特征多项式之积，且显然(3)成立.

同理可证明

定理 3 设 A 为体 K 上 m 阶可中心化矩阵，B 为 K 上相似于一个中心下三角阵的 n 阶矩阵，则体 K 上矩阵

$$D=\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix} \tag{8}$$

可中心化，且 D 的弱特征多项式为 A 与 B 的弱特征多项式之积，并且(3)成立.

注 1　定理 2 是定理 1 的推广. 另外，中心下三角阵是[3]中定义的广义 Π 矩阵的推广.

§3　定理 2 的应用

定理 2,3 有广泛应用，下面给出两个新的结果.

定理 4　设 A,B 分别为体 K 上 $m\times n$ 矩阵与 $n\times m$ 矩阵，且 AB 与 B 都是可中心化的. 又设 $f(\lambda)$ 与 $g(\lambda)$ 分别为 AB 与 BA 的弱特征多项式，则

$$\lambda^n f(\lambda) = \lambda^m g(\lambda). \tag{9}$$

证明　因为 $\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ A & I_m \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & AB \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ A & I_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} BA & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

由定理 2 知 $\begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & AB \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} BA & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 均可中心化，且它们的弱特征多项式分别为 $\lambda^n f(\lambda)$ 与 $\lambda^m g(\lambda)$，故显然(9)成立. □

定理 5　设 A 为 n 阶半正定自共轭四元数矩阵，B 为 n 阶自共轭四元数矩阵，则 AB 与 BA 均可中心化，并且有 $\lambda_i(AB)=\lambda_i(BA)=\lambda_i(A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}})\in R$, $i=1,\cdots,n$.

证明　由[2,3]知存在广义酉矩阵 U 使得 $U^*AU=\mathrm{diag}(D,0)$，其中 $D=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_s)$，$\lambda_i=\lambda_i(A)>0$. 因为 $A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}}$ 是自共轭矩阵，并且

$$U^*ABU = U^*AUU^*BU = \begin{pmatrix} DB_1 & DB_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{10}$$

其中 B_1 是自共轭矩阵. 由[4]中定理 3 知 DB_1 可中心化，故由定理 2 知 AB 可中心化. 同理可知 BA 可中心化. 由定理 4 知 $AB=A^{\frac{1}{2}}(A^{\frac{1}{2}}B)$ 与 $A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}}$ 以及 BA 有相同的弱特征多项式，从而有 $\lambda_i(AB)=\lambda_i(BA)=\lambda_i(A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}})\in R$, $1\leqslant i\leqslant n$.

注 2　定理 5 推广了[4]中定理 3(那里要求 A 正定自共轭)中的前部分结果. 更进一步，我们提出如下问题：若 A,B 均为 n 阶自共轭四元数矩阵，则 AB 是否可中心化？

当 $n=2$ 时不难证明答案是肯定的，但当 $n>2$ 时的情况尚不知.

参　考　文　献

[1]　谢邦杰，体上矩阵的特征根与标准形式的应用，数学学报，23:4(1980)，522—533.

[2]　谢邦杰，任意体上可中心化矩阵的行列式，吉林大学自然科学学报，3(1980)，1—33.

[3]　谢邦杰，四元数自共轭矩阵与行列式，吉林大学自然科学学报，2(1980)，19—35.

[4]　曹重光，四元数自共轭矩阵的几个定理，数学研究与评论，8:3(1988)，346—348.

[5]　谢邦杰，抽象代数学，上海科学技术出版社，1982.

Several Theorems on Centralizable Matrices over Skew Field

Huang Liping
(Dept. of Baic Courses, Xiangtan Mining Institute, Xiangtan)

He Xiangming
(The Thirteenth Middle School, Liling, Hunan)

Abstract

This proves that: Let A, B be matrices over a skew field K, A is centralizable, B is similar to a central upper triangular matrix, then the matrix $D = \begin{pmatrix} A & A \\ o & B \end{pmatrix}$ over K is centralizable, and $\| D \| = \| A \| \cdot \| B \|$. By this result, we obtain some properties of centralizable matrices.