第13卷第3期 数 学 研 究 与 评 论 Vol. 13 No. 3
1993年8月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Aug. 1993

线搜索闭性的几个新结果*

刘光辉 柯小伍
（中国科学院应用数学研究所，北京 100080）

摘 要

本文证明了回追步长搜索、Curry－Altman 步长搜索及其改进形式、Goldstein－Armijo 算法的闭性，并指出真正的 Armijo 步长搜索是回追步长搜索的特例，从而肯定了真正 Armijo 步长搜索的闭性.

1 引 言

绝大多数的非线性最优化的迭代算法是由一列线搜索构成的. 线搜索算法有若干种，它的特性对于最优化算法的全局收敛性起着本质的作用. 为了研究算法的全局收敛性，Zangwill[1]1969 年把点集映象的概念引入非线性最优化领域中，并给出了在闭性条件下的全局收敛性定理. 不同的线搜索被归结成不同的点到集映象，研究这些线搜索映象的闭性是十分重要的问题. Luenberger[2] 给出了最优线搜索和 Goldstein 线搜索的闭性证明，堵丁柱和昭江华[3]采用扩大点集映象的方法证明了 Armijo 搜索规则、Wolfe 搜索规则和 Goldstein 搜索规则的闭性. 但[3]中讨论的"Armijo 规则"是 Armijo 规则的一种变型，并非原来的 Armijo 规则. 本文将首先证明回追搜索(backtracking)规则的闭性，Armijo 搜索规则只是它的一种特殊情形. 其次证明 Curry－Altman 搜索规则及其一种改进形式[4]的闭性，最后证明无约束形式的 Goldstein－Armijo 算法[5]的闭性.

2 几种线搜索规则的闭性

讨论无约束最优化问题 $\min f(x)$，其中 $x\in R^n$，$f\in C^1$. 假定 $\min f(x)\neq-\infty$. 迭化算法的过程可表为 $x_{k+1}=x_k+\lambda_k d_k$. d_k 为搜索方向，λ_k 为按某一线搜索规则选取的步长. 线搜索可归结为映象 $A: X\to\mathscr{F}(R^n)$，其中 $X=\{(x,d)\mid(x,d)\in R^n\times R^n, \nabla f(x)^T d<0\}$，$\mathscr{F}(R^n)=\{Y\mid Y\subseteq R^n\}$，对 $\forall\ (x,d)\in X$，$A(x,d)=\{x+\lambda d\mid\lambda\geqslant0, \lambda$ 满足某种线搜索规则的条件$\}$. 扩大线搜索映象的方法[6]是将映象 A 扩大为另一点到集映象 $H: X\to\mathscr{F}(R^n)$，H 满足条件：对$\forall\ (x,d)\in X$ 有

a) $A(x,d)\subseteq H(x,d)$. b) H 是闭的. c) $y\in H(x,d)\Rightarrow f(y)<f(x)$.

下面首先讨论回追搜索规则[7]，其计算步骤如下：

* 1991年4月30日收到. 国家自然科学基金资助项目.

步 0. 给定 $a\geqslant 1,\tau,\tau'\in(0,1),\tau\leqslant\tau',\varepsilon\in(0,\frac{1}{2})$. 令 $\lambda=a$.

步 1. 若 λ 满足

$$f(x_k+\lambda d_k)\leqslant f(x_k)+\varepsilon\lambda\nabla f(x_k)^T d_k \tag{1}$$

转 3. 否则转 2.

步 2. 取 $\tilde{\lambda}\in[\tau\lambda,\tau'\lambda]$, 令 $\lambda=\tilde{\lambda}$,转 1.

步 3. 令 $\lambda_k=\lambda$,终止.

易见,回追搜索规则产生的新点 $x_k+\lambda_k d_k$ 当 $\lambda=a$ 使(1)式成立时有 $x_k+\lambda_k d_k\in E_1=\{x_k+ad_k\}$,当 $\lambda=a$ 使(1)式不成立时有 $x_k+\lambda_k d_k\in E_2=\{x_k+\lambda d_k\,|\,f(x_k+\lambda d_k)\leqslant f(x_k)+\varepsilon\lambda\nabla f(x_k)^T d_k$ 且 $\exists\, t\in[\frac{\lambda}{\tau'},\frac{\lambda}{\tau}]$使 $f(x_k+td_k)>f(x_k)+\varepsilon t\nabla f(x_k)^T d_k\}$. 于是 $A(x_k,d_k)\subseteq E_1\cup E_2$. 下面把 $A(x_k,d_k)$ 扩大为 $\Pi(x_k,d_k)$. 令

$$\xi(x_k,d_k)=\min\{\xi\geqslant 0\,|\,\nabla f(x_k+\xi d_k)^T d_k=\varepsilon\nabla f(x_k)^T d_k\}, \tag{2}$$

$$\tilde{\Pi}(x_k,d_k)=\{x_k+\lambda d_k\,|\,\lambda\geqslant\tau\xi(x_k,d_k),$$

且

$$f(x_k+\lambda d_k)\leqslant f(x_k)+\varepsilon\lambda\nabla f(x_k)^T d_k\},$$

$$\varphi_k(t)=f(x_k+td_k)-f(x_k)-\varepsilon t\nabla f(x_k)^T d_k,$$

$$\Pi(x_k,d_k)=\begin{cases}E_1 & \text{当 } \varphi_k(a)<0 \text{ 时}\\ E_1\cup\tilde{\Pi} & \text{当 } \varphi_k(a)=0 \text{ 时}\\ \tilde{\Pi} & \text{当 } \varphi_k(a)>0 \text{ 时}.\end{cases}$$

定理 1 回追步长搜索 $A(\cdot,\cdot)$是闭的.

证明 先证 $\xi(\cdot,\cdot)$是下半连续的.

设$(p_k,q_k)\to(x,d)$,令$\underline{\lim}_{k\to\infty}\xi(p_k,q_k)=\mu$,则存在 $K\subseteq N=\{1,2,\cdots\}$,使$\lim_{k\to\infty}\xi(p_k,q_k)=\mu,k\in K$. 由 $\xi(p_k,q_k)$定义有 $\nabla f(p_k+\xi(p_k,q_k))^T q_k=\varepsilon\nabla f(p_k)^T q_k$. 令 $k\to\infty,k\in K$,有 $\nabla f(x+\mu d)^T d=\varepsilon\nabla f(x)^T d$. 由 $\xi(x,d)$定义即知 $\mu\geqslant\xi(x,d)$,即证 ξ 为下半连续.

再证映象 Π 在(x,d)为闭映象,这里$(x,d)\in X$.

设$(p_k,q_k)\to(x,d),y_k\in\Pi(p_k,q_k),y_k\to y$,现分三种情况讨论:

i) 有无穷个 k,如 $k\in K'\subseteq N$,使 $\varphi_k(a)<0$.

此时有 $y_k=p_k+aq_k,k\in K'$. 令 $k\to\infty,k\in K'$知 $y=p+aq,\varphi(a)=f(x+ad)-f(x)-\varepsilon a\nabla f(x)^T d\leqslant 0$. 故总有 $y\in\Pi(x,d)$.

ii) 有无穷个 k,如 $k\in K''\subseteq N$,使 $\varphi_k(a)>0$.

此时,$y_k\in\tilde{\Pi}(x_k,d_k),k\in K''$. 通过极限过程 $k\to\infty,k\in K''$,据 $\xi(\cdot,\cdot)$的下半连续性即知 $y\in\tilde{\Pi}(x,d)$. $\varphi(a)\geqslant 0$,若 $\varphi(a)>0,y\in\Pi(x,d)=\tilde{\Pi}(x,d)$;若 $\varphi(a)=0,y\in\tilde{\Pi}(x,d)\subseteq E_1\cup\tilde{\Pi}=\Pi(x,d)$.

iii) 不妨设 $\varphi_k(a)=0,\ k=1,2,\cdots$.

易知此时存在形如 $\lambda_k(\frac{1}{\tau})^j,\ j=0,1,2\cdots$的 λ 使得 $f(x_k+\lambda d_k)-f(x_k)\leqslant\varepsilon\lambda\nabla f(x_k)^T d_k,f(x_k+\frac{\lambda}{\tau}d_k)-f(x_k)>\varepsilon\frac{\lambda}{\tau}\nabla f(x_k)^T d_k$. 后一个不等式利用中值定理及 $\xi(\cdot,\cdot)$的定义有 $\theta_k\frac{\lambda}{\tau}\geqslant\xi(x_k,$

d_k), $\theta_k \in (0,1)$. 从而 $\lambda \geqslant \tau\xi(x_k,d_k)$. 由此即知 $\widetilde{H}$ 当 $\varphi_k(a)=0$ 时非空. 由 ii)易证此时也有 $y \in E_1 \cup \widetilde{H} = H(x,d)$.

最后证明 $H(x,d)$ 满足条件 a)、c).

a) $\forall\ y=x+\lambda d \in A(x,d)$. 若 $\varphi(a) \leqslant 0$, 由 A 定义知 $y=x+ad$. 不管 $\varphi(a)<0$ 或 $\varphi(a)=0$ 总有 $y \in H(x,d)$; 若 $\varphi(a)>0$, 则有 $y \in E_2$, 由 E_2 定义有 $\varphi(\lambda) \leqslant 0$, 且$\exists\ t \in [\frac{\lambda}{\tau'}, \frac{\lambda}{\tau}]$, 使 $\varphi(t)>0$. 由 $\varphi(t)>0$, 利用中值定理知$\exists\ \theta \in (0,1)$ 使 $\nabla f(x+\theta td)^T d > \varepsilon \nabla f(x)^T d$, 由 $\xi(x,d)$ 定义有 $\theta t \geqslant \xi(x,d)$, 而 $\theta t \leqslant t \leqslant \frac{\lambda}{\tau}$, 故 $\lambda \geqslant \tau\xi(x,d)$, 即有 $y \in \widetilde{H}(x,d)=H(x,d)$. 故 $A(x,d) \subseteq H(x,d)$.

c) 显然.

我们知道, Armijo 搜索步长是形如 $\lambda=\tau^j a, j=0,1,\cdots$. 使(1)式成立的最大数, 其计算步骤为:

步 0. 给定 $a>1$, $\tau \in (0,1)$, $\varepsilon \in (0,\frac{1}{2})$.

步 1. 令 $\lambda=a$.

步 2. 若 λ 满足(1), 则转 4.

步 3. 取 $\lambda := \tau\lambda$, 转 2.

步 4. 令 $\lambda_k=\lambda$, 终止.

显然, Armijo 步长规则是回追步长规则当 $\tau=\tau'$ 时的特例. [3]讨论的 Armijo 步长规则的一种变化形式是

步 0. 给定 $a>0, \tau \in (0,1), \varepsilon \in (0,\frac{1}{2})$, 令 $\lambda=a$.

步 1. 若 λ 满足(1), 转 4, 否则到 2.

步 2. 令 $\lambda := \tau\lambda$, 到 3.

步 3. 若 λ 满足(1), 到 6. 否则到 2.

步 4. 令 $\lambda := \frac{\lambda}{\tau}$, 到 5.

步 5. 若 λ 满足(1), 转 4, 否则转 7.

步 6. 令 $\lambda_k=\lambda$. 停止.

步 7. 令 $\lambda_k=\tau\lambda$. 停止.

不管 $\lambda=a$ 是否满足(1), 最后, λ_k 总能满足: $f(x_k+\lambda_k d_k) \leqslant (f(x_k)+\varepsilon\lambda_k \nabla f(x_k)^T d_k, f(x_k+\frac{\lambda_k}{\tau}d_k) > f(x_k)+\varepsilon\frac{\lambda_k}{\tau}\nabla f(x_k)^T d_k$. [3]中证明了上述线搜索的闭性.

下面我们来讨论 Curry-Altman 搜索规则的闭性. 这个规则的定义是: 搜索步长 λ_k 取为方程 $[\nabla f(x_k+\lambda d_k)-\varepsilon\nabla f(x_k)]^T d_k=0$ 的最小正根, 其中 $\varepsilon \in (0,1)$.

定理 2 Curry-Altman 步长搜索是闭的.

证明 对于给定的 $\varepsilon \in (0,1)$, $\xi(\cdot,\cdot)$ 由(2)给出, 取定 $\bar{\varepsilon} \in (0,\varepsilon)$ 定义

$$\eta(x,d) = \max\{\eta \mid \nabla f(x+td)^T d \leqslant \bar{\varepsilon}\nabla f(x)^T d \quad \forall\ t \in [0,\eta]\}. \tag{3}$$

由假设 $\min f(x) \neq -\infty$ 易知 $\eta(x,d)$ 存在. 且由 ∇f 的连续性知 $\nabla f(x+\eta(x,d))^T d=\bar{\varepsilon}\nabla f(x)^T d$. 于是由 $\nabla f(x)^T d<0$ 有 $\eta(x,d)>\xi(x,d)$. 我们先证 $\eta(x,d)$ 是上半连续的.

令 $(x_k,d_k) \to (x,d)$, $\overline{\lim_{k\to\infty}}\eta(x_k,d_k)=v$. 设 $\eta(x_k,d_k) \to v, k \in K'' \subseteq N$. 对$\forall\ t<v$, 则$\exists\ k(t) \in K''$, 使$\forall\ k$

$\geqslant k(t), k\in K''$ 有 $t<\eta(x_k,d_k)$. 由(3)即知 $\nabla f(x_k+td_k)^Td_k\leqslant\bar{\varepsilon}\nabla f(x_k)^Td_k$. $k\geqslant k(t), k\in K''$, 令 $k\to\infty, k\in K''$, 有 $\nabla f(x+td)^Td\leqslant\bar{\varepsilon}\nabla f(x)^Td$. 由 t 的任意性知 $\eta(x,d)\geqslant v$. 即证 $\eta(x,d)$ 是上半连续的.

我们构造 $H(x,d)=\{x+\lambda d\mid\eta(x,d)\geqslant\lambda\geqslant\xi(x,d)\}$. 下面验证 H 满足 a)、b)、c).

a) 由 $A(x,d)=\{x+\xi(x,d)d\}$ 即知 $A(x,d)\subseteq H(x,d)$.

b) 设 $(x_k,d_k)\to(x,d)$, $y_k=x_k+\lambda_kd_k$, $y_k\in H(x_k,d_k)$, $y_k\to y$. 则有 $\xi(x_k,d_k)\leqslant\lambda_k\leqslant\eta(x_k,d_k)$. 令 $k\to\infty$, 由 $\xi(\cdot,\cdot)$ 的下半连续和 $\eta(\cdot,\cdot)$ 的上半连续性知 $\xi(x,d)\leqslant\underline{\lim}_{k\to\infty}\lambda_k\leqslant\eta(x,d)$. 设 $\lambda_k\to\lambda=\underline{\lim}_{k\to\infty}\lambda_k, k\in\bar{K}\subseteq N$. 在 $y_k=x_k+\lambda_kd_k$ 中令 $k\to\infty, k\in\bar{K}$ 有 $y=x+\lambda d$. 故 $y\in H(x,d)$, $H(x,d)$ 是闭的.

c) 设 $\nabla f(x)^Td<0, y\in H(x,d), y=x+\lambda d$ 要证 $f(y)<f(x)$.

由中值定理知 $\exists\ \theta\in(0,1)$, 使 $f(y)-f(x)=\lambda\nabla f(x+\theta\lambda d)^Td$. 而 $\theta\lambda<\lambda\leqslant\eta(x,d)$. 由 $\eta(x,d)$ 定义有 $\nabla f(x+\theta\lambda d)^Td\leqslant\bar{\varepsilon}\nabla f(x)^Td$. 于是 $f(y)-f(x)\leqslant\lambda\bar{\varepsilon}\nabla f(x)^Td<0$, $f(y)<f(x)$.

至此,即证定理 2.

1987 年 N. I. Djuranovic 改进了 Curry－Altman 搜索,其搜索规则是:由 (x,d) 搜索而得 $y=x+\lambda d$, 其中 λ 满足: $\lambda\in[q\bar{\lambda},\bar{\lambda}]$. 这里 $q\in(0,1)$, $\bar{\lambda}=\xi'(x,d)=\min\{\xi\geqslant0\mid\nabla f(x+\xi d)^Td=-\sigma(-\nabla f(x)^Td)\}$. 其中的 $\sigma:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ 是一个强迫函数,且 $\sigma(t)\leqslant\varepsilon t, \forall\ t\geqslant0$. $\varepsilon\in(0,1)$ 是常数.

定理 3 在 $\sigma(t)$ 是连续函数的情况下,改进的 Curry－Altman 搜索是闭的.

证明 取 $\varepsilon'\in(0,1)$. 定义 $\eta'(x,d)=\max\{\eta\geqslant0\mid\nabla f(x+td)^Td\leqslant-\varepsilon'\sigma(-\nabla f(x)^Td), \forall\ t\in[0,\eta]\}$. 由 ε' 的取法和假设 $\min f(x)\neq-\infty$ 易知 $\eta'(x,d)$ 存在. 由 $f\in C^1$ 知: $\nabla f(x+\eta'(x,d)d)^Td=-\varepsilon'\sigma(-\nabla f(x)^Td)>-\sigma(-\nabla f(x)^Td)$.
由 $\xi'(x,d)$ 定义知 $\eta'(x,d)>\xi'(x,d)$. 与证 $\xi(\cdot,\cdot)$ 的下半连续性和 $\eta(\cdot,\cdot)$ 的上半连续性一样,在 $\sigma(t)$ 是连续函数的条件下易证 $\xi'(x,d)$ 是下半连续的, $\eta'(x,d)$ 是上半连续的. 定义 $H(x,d)=\{x+\lambda d\mid q\xi'(x,d)\leqslant\lambda\leqslant\eta'(x,d)$, 且 $f(x+\lambda d)-f(x)\leqslant-\lambda\sigma(-\nabla f(x)^Td)\}$. 下面证明 H 满足 a)、b)、c).

a) $\forall\ y=x+\lambda d\in A(x,d)=\{x+\lambda d\mid\lambda\in[q\bar{\lambda},\bar{\lambda}]\}$, 我们可以断言: $f(x+\lambda d)-f(x)\leqslant-\lambda\sigma(-\nabla f(x)^Td)$. 事实上,若不然则有 $f(x+\lambda d)-f(x)>-\lambda\sigma(-\nabla f(x)^Td)$. 由中值定理知 $\exists\ \theta\in(0,1)$ 使 $\nabla f(x+\theta\lambda d)^Td>-\sigma(-\nabla f(x)^Td)$. 令 $\Phi(t)=f(x+td)-f(x)$, 则

$$\Phi'(\theta\lambda)>-\sigma(-\nabla f(x)^Td)\geqslant\varepsilon\nabla f(x)^Td>\Phi'(0).$$

由介值定理知 $\exists\ \alpha\in(0,\theta\lambda)$, 使 $\Phi'(\alpha)=-\sigma(-\nabla f(x)^Td)$. 由 $\xi'(x,d)$ 定义知 $\alpha\geqslant\xi'(x,d)$, 而 $0<\alpha<\theta\lambda\lambda\leqslant\xi'(x,d)$, 矛盾! 所以 $f(x+\lambda d)-f(x)\leqslant-\lambda\sigma(-\nabla f(x)^Td)$. $y\in H(x,d)$, $A(x,d)\subseteq H(x,d)$.

b) 由 $\xi'(x,d)$ 的下半连续性, $\eta'(x,d)$ 的上半连续性, $\sigma(t)$ 的连续性易证 $H(x,d)$ 是闭的.

c) 显然.

由上即知改进的 Curry－Altman 搜索当 $\sigma(t)$ 连续时是闭算法.

对于 Goldstein－Armijo 算法[5],我们仅讨论无约束情形,其定义是:

给定一个强迫函数 $\sigma(t)$, 给定 $\varepsilon\in(0,1)$, $q\in(0,1)$. 迭代过程 $x_{k+1}=x_k+\lambda_kd_k$ 中步长 λ_k 的选取分两步 $\lambda_k=\omega_k\alpha_k$.

Ⅰ α_k 的选取: 若 $\nabla f(x_k)^Td_k=0$, 取 $\alpha_k=0$. 若 $\nabla f(x_k)^Td_k<0$ 取 $\alpha_k\geqslant\frac{1}{\|d_k\|}\sigma\left(\frac{|\nabla f(x_k)^Td_k|}{\|d_k\|}\right)$.

Ⅱ ω_k 的选取：取 $\omega_k=q^{m(k)}, m(k)=0,1,2,\cdots$. 其中 $m(k)$是第一个使 $f(x_k+\omega_k\alpha_k d_k)-f(x_k)\leqslant\varepsilon\omega_k\alpha_k\nabla f(x_k)^T d_k$,成立的数.

我们先给出假设条件：1)$\sigma(t)$下半连续. 2) $\alpha_k\|d_k\|$有界.

定理 4 在上述条件下，Goldstein－Armijo 算法是闭的.

证明 由假设条件 2)可设 $M>0, \alpha_k\|d_k\|\leqslant M$. 设 $X=\{(x,d)\mid(x,d)\in R^n\times R^n, \nabla f(x)^T d<0\}$，点集映象 $\overline{A}: X\to\mathscr{P}(R^n)$. $\overline{A}(x,d)=\bigcup\limits_{\alpha\in B(x,d)}\{x+\lambda d\mid\lambda=\omega\alpha, \omega$ 由算法的 Ⅱ 确定$\}$. 其中 $B(x,d)=\{\alpha\geqslant 0\mid M\geqslant\alpha\|d\|\geqslant\sigma(\frac{|\nabla f(x)^T d|}{\|d\|})\}$. 令 $\overline{E}_\alpha=\{x+\alpha d\}$, $\widetilde{\Pi}_\alpha(x,d)=\{x+\lambda d\mid\lambda=\omega\alpha$ 满足：$\omega\in(0,1], f(x+\lambda d)-f(x)\leqslant\varepsilon\lambda\nabla f(x)^T d, \lambda\geqslant q\xi(x,d)\}$. $\xi(\cdot,\cdot)$定义见(2).

$$\overline{\varphi}(t)=f(x+td)-f(x)-\varepsilon t\nabla f(x)^T d.$$

$$\Pi'_\alpha(x,d)=\begin{cases}\overline{E}_\alpha & \text{当 } \overline{\varphi}(\alpha)<0 \text{ 时}\\ \overline{E}_\alpha\cup\widetilde{\Pi}_\alpha & \text{当 } \overline{\varphi}(\alpha)=0 \text{ 时}\\ \widetilde{\Pi}_\alpha & \text{当 } \overline{\varphi}(\alpha)>0 \text{ 时}\end{cases}$$

这样将 $\overline{A}$ 扩大为 $\overline{\Pi}: X\to\mathscr{P}(R^n)$.

$$\overline{\Pi}(x,d)=\bigcup_{\alpha\in B(x,d)}\Pi'_\alpha(x,d).$$

下面我们来证明 $\overline{\Pi}$ 满足 a)、b)、c).

a) $\forall\, y\in\overline{A}(x,d)$，设 $y=x+\omega\alpha d$. 若 $\overline{\varphi}(\alpha)<0$，则由 $\overline{A}$ 定义知 $\omega=1$. $y\in\overline{E}_\alpha=\Pi'_\alpha(x,d)\subseteq\overline{\Pi}(x,d)$；若 $\overline{\varphi}(\alpha)=0$，则 $y=x+\alpha d\in\overline{E}_\alpha\subseteq\overline{E}_\alpha\cup\widetilde{\Pi}_\alpha=\Pi'_\alpha(x,d)\subseteq\Pi(x,d)$；若 $\overline{\varphi}(\alpha)>0$，则由 $\overline{A}$ 定义及算法的 Ⅱ 知最后总有 $\overline{\varphi}(\omega\alpha)\leqslant 0, \overline{\varphi}(\frac{\omega\alpha}{q})>0$. 由 $\overline{\varphi}(\frac{\omega\alpha}{q})>0$，利用中值定值及 $\xi(\cdot,\cdot)$定义有 $\lambda=\omega\alpha\geqslant q\xi(x,d)$，所以 $y\in\widetilde{\Pi}_\alpha=\Pi'_\alpha\subseteq\Pi(x,d)$. 故总有 $\overline{A}(x,d)\subseteq\overline{\Pi}(x,d)$.

b) $\forall\,(x,d)\in X$，设 $(x_k,d_k)\to(x,d)$, $y_k\in\overline{\Pi}(x_k,d_k)$, $y_k=x_k+\omega_k\alpha_k d_k\to y$. 由 $\nabla f(x)^T d<0$ 知 $d\neq 0$, $\sigma(\frac{|\nabla f(x)^T d|}{\|d\|})>0$. 由 $\frac{M}{\|d_k\|}\geqslant\alpha_k\geqslant\frac{1}{\|d_k\|}\sigma(\frac{|\nabla f(x)^T d|}{\|d_k\|})$及 σ 的下半连续性知 $\alpha_k\to\alpha=\lim\limits_{l\to\infty}\alpha_l$, $k\in K_1\subseteq N$, $\frac{M}{\|d\|}\geqslant\alpha\geqslant\frac{1}{\|d\|}\sigma(\frac{|\nabla f(x)^T d|}{\|d\|})>0$. 以下分三种情况讨论：

i) K_1 中有无穷多个 k 如 $k\in K_2\subseteq K_1$ 使 $\overline{\varphi}_k(\alpha_k)=f(x_k+\alpha_k d_k)-f(x_k)\leqslant\varepsilon\alpha_k\nabla f(x_k)^T d_k<0$. 则 $y_k=x_k+\alpha_k d_k, k\in K_2$，令 $k\to\infty, k\in K_2$ 有 $y=x+\alpha d\in\overline{E}_\alpha, \overline{\varphi}(\alpha)\leqslant 0$，不管 $\overline{\varphi}(\alpha)<0$ 或 $\overline{\varphi}(\alpha)=0$，总有 $y\in\Pi'_\alpha\subseteq\overline{\Pi}(x,d)$.

ii) K_1 中有无穷多个 k 如 $k\in K_3\subseteq K_1$ 使 $\overline{\varphi}_k(\alpha_k)>0$. 则 $y_k\in\widetilde{\Pi}_{\alpha_k}, k\in K_3$. 即有 $\omega_k\in(0,1]$, $\overline{\varphi}_k(\omega_k\alpha_k)\leqslant 0, \omega_k\alpha_k\geqslant q\xi(x_k,d_k), k\in K_3$. 由 ω_k 的有界性知$\exists\ K_4\subseteq K_3, \omega_k\to\omega, k\in K_4$. 通过极限过程 $k\to\infty, k\in K_4$ 有：$y=x+\omega\alpha d, \overline{\varphi}(\omega\alpha)\leqslant 0, \omega\alpha\geqslant q\xi(x,d), 1\geqslant\omega\geqslant\frac{q\xi(x,d)}{\alpha}>0$. 即有 $y\in\widetilde{\Pi}_\alpha(x,d)$. 而 $\overline{\varphi}(\alpha)\geqslant 0$. 不管 $\overline{\varphi}(\alpha)>0$，或 $\overline{\varphi}(\alpha)=0$，总有 $y\in\Pi'_\alpha(x,d)\subseteq\overline{\Pi}(x,d)$.

iii) 不妨设$\forall\ k\in K_1, \overline{\varphi}_k(\alpha_k)=0$.

此时易证也有 $y\in\overline{\Pi}(x,d)$.

故有 $y\in\overline{\Pi}(x,d)$，$\overline{\Pi}$ 是闭的.

c) 显然.

所以，Goldstein－Armijo 算法在假设的条件下是一个闭算法.

最后，对于许多 Armijo 搜索规则、Goldstein 搜索规则的改进形式[8]和沿曲线搜索规则

[9]、[10]、[11]，我们采用类似的方法也证明了它们的闭性.

本文的全部工作自始至终是在我们俩的导师韩继业教授的鼓励、启发和指导下进行的.文章的修改和改进，他付出了辛勤的劳动，在此，让我们对他表示衷心的感谢！

参 考 文 献

[1] Zangwill, W. I., *Nonlinear Programming; a unified approach*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, RI, 1969.

[2] Luenberger, D. G., *Linear and Nonlinear Programming*, Addison—Wesley, Menlo Park California, 1984.

[3] 堵丁柱，唱江华，科学通报，15(1990)，1135—1137.

[4] Djuranovic—milic, N. J., *On a modification of a step—size algorithm*, European Journal of O. R., 31(1987), 66—70.

[5] Ortega, J. M. and Rheinboldt, W. C., *Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables*, Academic Press. New York, 1970.

[6] 堵丁柱，应用数学学报，8(1985)，142—150.

[7] Byrd, R. H. and Nocedal, J., *A tool for the analysis of quasi—newton methods with application to unconstained minimization*, SIAM J. Numer. Anal. 26;3(1989).

[8] Leone, R., Gaudioso, M., Gripp, L., *Stopping criteria for linesearch methods without derivatives*, Math. Prog. 30(1984) 285—300.

[9] Mccormick, G., *A modification of Armijo's step—size rule for negative curvature*, Math. Prog., 13(1977) 111—115.

[10] Goldfarb, D., *Curvilinear path steplength algorithms for minimization which use directions of negative curvature*, Math. Prog., 18(1980) 31—40.

[11] More, J. J., and Sorensen, D. C., *On the use of directions of negative curvature in a modified Newton method*, Math. Prog., 16(1979) 1—20.

Several New Results of Linear Search Closed Property

Liu Guanghui　　*Ke Xiaowu*
(Inst. of Appl. Math., Academia Sinica, Beijing)

Abstract

This paper proves the closed properties of backtracking linear search, Curry- Altman linear search, the improved model of Curry-Altman linear search and Goldstein-Armijo linear search and shows that the original Armijo linear search is a special case of backtracking linear search, then the closed property of the original Armijo linear search.