第13卷第3期　　数学研究与评论　　Vol. 13 No. 3
1993年8月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Aug. 1993

Hermite—Fejér 插值算子的平均收敛*

郁 定 国
(绍兴师范专科学校，浙江 312000)

摘 要

本文讨论了以第二类 Чебышев 多项式 $U_n(x)$ 的零点为插值节点的 Hermite—Fejér 插值算子 $H_n(f,x)$ 及若干非一致收敛的 Hermite—Fejér 型插值算子在区间[－1,1]上关于权函数 $(1-x^2)^{1/2}$ 的平均收敛问题. 我们主要证得：当 $0<p<3$ 时，对任何 $f(x)\in C_{[-1,1]}$ 都有 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_1^{-1}|H_n(f,x)-f(x)|^p\sqrt{1-x^2}dx=0$，并给出了收敛阶. 此外也指明，当 $p=3$ 时，该式对某些连续函数未必成立.

一 引 言

最近 A. K. Varma 与 J. Prasad[1] 给出了以第一类 Чебышев 多项式 $T_n(x)=\cos n\theta$ $(x=\cos\theta)$ 的零点为插值节点的 Hermite—Fejér 插值算子加权平均收敛的收敛阶，还给出了以第二类 Чебышев 多项式 $U_n(x)$ 的零点为插值节点的拟 Hermite—Fejér 插值算子 $Q_n(f,x)$ 及扩充 Hermite—Fejér 插值算子 $R_n(f,x)$ 的加权平均收敛的收敛阶(关于权函数 $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$). 注意到这几个算子对任何 $f(x)\in C_{[-1,1]}$(区间[－1,1]上连续函数的全体)在区间[－1,1]上都一致收敛于 $f(x)$[2](我们称之为 Weierstrass—过程或简称 W—过程). 至于那些非 W—过程的插值算子的加权平均收敛性又如何呢？他们并未提及. 本文将讨论以 $U_n(x)$ 的零点为插值节点的几个非 W—过程的加权平均收敛问题.

二 主要结果

以第二类 Чебышев 多项式 $U_n(x)=\dfrac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$ $(x=\cos\theta)$ 的零点

$$x_{kn}=\cos\theta_{kn}=\cos\frac{k\pi}{n+1},\quad k=1,2,\cdots,n \tag{2.1}$$

为插值节点，区间[－1,1]上的函数 $f(x)$ 的 Hermite—Fejér 插值算子可表为[2]：

$$H_n(f,x)=\sum_{k=1}^{n}f(x_{kn})v_{kn}(x)l_{kn}^2(x),$$

其中

* 1991年1月14日收到. 92年12月1日收到修改稿.

$$\begin{cases} v_{kn}(x) = 1 - \dfrac{3x_{kn}}{1-x_{kn}^2}(x - x_{kn}); \\ l_{kn}(x) = \dfrac{(1-x_{kn}^2)U_n(x)}{(n+1)(x-x_{kn})}. \end{cases} \quad (k = 1,2,\cdots,n) \tag{2.2}$$

它满足插值条件：

$$\begin{cases} H_n(f, x_{kn}) = f(x_{kn}), \\ H'_n(f, x_{kn}) = 0. \end{cases} \quad (k = 1,2,\cdots,n) \tag{2.3}$$

周知，即使对于 $f(x) \in C_{[-1,1]}$，$H_n(f, \pm 1)$ 也未必收敛于 $f(\pm 1)$（参见[3]或[2]）. 然而我们证得如下：

定理 1 当 $0<p<3$ 时，对任何 $f(x) \in C_{[-1,1]}$，有

$$\int_{-1}^{1} |H_n(f,x) - f(x)|^p \sqrt{1-x^2}dx = O(1)\{[\omega(\frac{1}{n})]^p + \Delta_{n,p}\}, \tag{2.4}$$

其中

$$\Delta_{n,p} = \begin{cases} n^{-p} & 当\ 0 < p \leqslant 1 \\ n^{1-p} & 当\ 1 < p \leqslant 2, \\ n^{p-3} & 当\ 2 < p < 3 \end{cases} \tag{2.5}$$

$\omega(\cdot) = \omega(f, \cdot)$ 是 $f(x)$ 的连续模.

推论 1 当 $0<p<3$ 时，对任何 $f(x) \in C_{[-1,1]}$，有

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} |H_n(f,x) - f(x)|^p \sqrt{1-x^2}dx = 0. \tag{2.6}$$

注 1 当 $p=3$ 时，(2.6)式未必成立（见下文例 1）.

除了拟 Hermite－Fejér 插值算子 $Q_n(f,x)$ 与扩充 Hermite－Fejér 插值算子 $R_n(f,x)$ 外，还可以考察 13 种由于增添边界插值条件而得的拓广的 Hermite－Fejér 插值算子（统称为 Hermite－Fejér 型插值算子）由文[4]知，当插值节点为(2.1)所示时，与 $H_n(f,x)$ 一样，$H_{i,n}(f,x)$ $(i=11,12,\cdots,16)$ 均非 W－过程. 这里诸 $H_{in}(f,x)$ 除了均满足插值条件

$$\begin{cases} H_{i,n}(f, x_{kn}) = f(x_{kn}) \\ H'_{i,n}(f, x_{kn}) = 0 \end{cases} \quad k = 1,2,\cdots,n$$

外，还分别满足条件：

$H_{11,n}(f,1)=f(1)$，$H'_{n,n}(f,1)=0$；　$H_{12,n}(f,-1)=f(-1)$，$H'_{12,n}(f,-1)=0$；

$H_{13,n}(f,1)=f(1)$；$H_{14}(f,-1)=f(-1)$；　$H'_{15,n}(f,1)=0$；$H'_{16,n}(f,-1)=0$.

对这几个算子，我们证得：

定理 2 当 $0<p<3$ 时，对任何 $f(x) \in \mathrm{Lip}\alpha$ 记 $E_{(i,\alpha,p)} = \int_{-1}^{1} |H_{i,n}(f,x) - f(x)|^p \sqrt{1-x^2}dx$，则对于 $i=11,12$，有

1) 当 $0<p\leqslant 1$ 时，$E_{(i,\alpha,p)} = O(n^{-p\alpha})$ $(0<\alpha\leqslant 1)$；

2) 当 $\frac{1}{2}<\alpha\leqslant 1$，$1<p<3$ 时，$E_{(i,\alpha,p)} = O(\Delta_{n,p})$；

3) $E_{(i,\frac{1}{2},p)} = O(1)\Delta_{n,p}(\log n)^p$，$(1<p<3)$；

4) 当$\frac{1}{4}<\alpha<\frac{1}{2}$时，$E_{(i,\alpha,p)}=\begin{cases}O(n^{1-2p\alpha}) & \text{当}\frac{1}{2\alpha}<p\leqslant 2\\ O(n^{2(1-\alpha)p-3}) & \text{当 } 2\leqslant p<\frac{3}{2(1-\alpha)}\end{cases}$，其中，$\mathrm{Lip}\alpha=\{f\,|\,\omega(f,t)=O(t^{\alpha})\}\ 0<\alpha\leqslant 1$.

$\Delta_{n,p}$由(2.5)所示.

推论 2 当条件 1) $\frac{1}{2}\leqslant\alpha\leqslant 1$ 且 $0<p<3$； 2) $\frac{1}{4}<\alpha<\frac{1}{2}$且 $0<p\leqslant 1$ 或$\frac{1}{2\alpha}<p<\frac{3}{2(1-\alpha)}$； 3) $0<\alpha\leqslant\frac{1}{4}$且 $0<p\leqslant 1$

有一满足时，就有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{1}|H_{i,n}(f,x)-f(x)|^p\sqrt{1-x^2}dx=0\ (i=11,12). \tag{2.7}$$

定理 3 当 $0<p<3$ 时，对任何 $f(x)\in C_{[-1,1]}$ 以及 $i=13,14,15,16$，我们有

$$\int_{-1}^{1}|H_{i,n}(f,x)-f(x)|^p\sqrt{1-x^2}dx=O(1)\{[\omega(\frac{1}{n})]^p+\Delta_{n,p}\}.$$

推论 3 当 $0<p<3$ 时，对任何 $f(x)\in C_{[-1,1]}$，有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{1}|H_{i,n}(f,x)-f(x)|^p\sqrt{1-x^2}dx=0\ (i=13,14,15,16). \tag{2.8}$$

注 2 当 $p=3$ 时，对于任一 $i\in\{13,14,15,16\}$(2.7)及(2.8)式未必对每个连续函数都成立(见下文例 3).

三 定理的证明

由文[1]的定理 3 易见成立如下：

引理 1 对任何 $f(x)\in C_{[-1,1]}$ 及固定的 $p>0$，当插值节点由(2.1)所示时，拟 Hermite—Fejér 插值算子 $Q_n(f,x)$满足不等式

$$\int_{-1}^{1}|Q_n(f,x)-f(x)|^p\sqrt{1-x^2}dx=O(1)[\omega(\frac{1}{n})]^p. \tag{3.1}$$

根据插值基本理论和 $U_n(x)$的性质，经过一些初等计算可得下列引理. 证明从略.

引理 2

$$\int_{-1}^{1}|U_n(x)|^{2p}\sqrt{1-x^2}dx=\begin{cases}O(1) & \text{当 } 0<p\leqslant 1\\ O(n) & \text{当 } 1<p\leqslant 2.\\ O(n^{2p-3}) & \text{当 } p>2\end{cases} \tag{3.2}$$

引理 3 当$\{x_{kn}\}$，$\{l_{kn}(x)\}$分别由(2.1)与(2.2)所示时，有

$$\sum_{k=1}^{n}(x-x_{kn})l_{kn}^2(x)=\frac{U_n^2(x)}{2(n+1)^2}\{2(1-x^2)\frac{U_n'(x)}{U_n(x)}+[(n-1)+2n(1-x^2)x]x\}. \tag{3.3}$$

引理 4 当$\{x_{kn}\}$由(1.1)所示时，则有

$$\sum_{k=1}^{n}x_{kn}^{2m}=\frac{2m-1}{2m}\sum_{k=1}^{n}x_{kn}^{2(m-1)}-\frac{1}{2m} \tag{3.4}$$

$$=\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}n-\frac{1}{2m}-\frac{2m-1}{2m(2m-2)}-\cdots-\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!},\qquad(3.5)$$

特别，

$$\sum_{k=1}^{n}x_{kn}^4=\frac{1}{8}(3n-5).\qquad(3.6)$$

定理 1 的证明　对任何 $f(x)\in C_{[-1,1]}$，记

$$d_n(f,x)=Q_n(f,x)-H_n(f,x).\qquad(3.7)$$

由于 $Q_n(f,x)$满足插值条件[5]

$$\begin{cases}Q_n(f,x_{kn})=f(x_{kn}),\\ Q_n'(f,x_{kn})=0 & (k=1,2,\cdots,n)\\ Q_n(f,\pm 1)=f(\pm 1)\end{cases}$$

与 $H_n(f,x)$的插值条件比较后，即得

$$d_n(f,x)=\{\frac{1+x}{2}[f(1)-H_n(f,1)]+\frac{1-x}{2}[f(-1)-H_n(f,-1)]\}\frac{U_n^2(x)}{(n+1)^2}.\qquad(3.8)$$

由(2.2)易见

$$|H_n(f,\pm 1)-f(\pm 1)|=|\sum_{k=1}^{n}[f(x_{kn})-f(\pm 1)](1\mp x_{kn}-2x_{kn}^2)|$$

$$\leqslant 2\sum_{k=1}^{n}\omega(1-x_{kn})=O(n).\qquad(3.9)$$

由(3.8)，(3.9)及引理 2，对于固定的 $0<p<3$，立得

$$\int_{-1}^{1}|d_n(f,x)|^p\sqrt{1-x^2}dx=O(n^{-p}\int_{-1}^{1}|u_n(x)|^{2p}\sqrt{1-x^2}dx$$

$$=O(\Delta_{n,p}).\qquad(3.10)$$

另一方面，由(3.7)易见

$$\int_{-1}^{1}|H_n(f,x)-f(x)|^p\sqrt{1-x^2}dx$$

$$=O(1)\{\int_{-1}^{1}|Q_n(f,x)-f(x)|^p\sqrt{1-x^2}dx+\int_{-1}^{1}|d_n(f,x)|^p\sqrt{1-x^2}dx\}.\qquad(3.11)$$

从而由(3.11)，(3.10)与引理 1 就证得了定理 1.

至于 $p\geqslant 3$ 情形会怎样呢？我们有如下

例 1　当 $p=3, f(x)\equiv x$ 时，有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{1}[H_n(x,x)-x]^3\sqrt{1-x^2}dx=0,\qquad(3.12)$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{1}[H_n(x,x)-x]^3\sqrt{1-x^2}dx\neq 0.\qquad(3.13)$$

事实上，由(2.2)及引理 3，

$$[x-H_n(x,x)]^3=[\sum_{k=1}^{n}(x-x_{kn})l_{kn}^2(x)]^2=\frac{(n-1)^3x^3}{8(n+1)^6}U_n^6(x)+I_n(x).\qquad(3.14)$$

由 $U_n(x)$的性质及引理 2 易见：

$$\int_{-1}^{1}I_n(x)\sqrt{1-x^2}dx=O(n^{-2}),\qquad(3.15)$$

同时

$$\int_{-1}^{1}\frac{(n-1)^3x^3}{8(n+1)^6}U_n^6(x)\sqrt{1-x^2}dx=0. \tag{3.16}$$

可是

$$\int_{-1}^{1}\left|\frac{(n-1)^3x^3}{8(n+1)^6}\right|U_n^6(x)\sqrt{1-x^2}dx=\frac{(n-1)^3}{8(n+1)^6}\int_0^{\pi}\frac{\sin^6(n+1)\theta}{\sin^4\theta}|\cos\theta|d\theta$$

$$\geqslant\frac{1}{8(n+1)^3}\int_0^{\frac{\pi}{2(n+1)}}\cdot\geqslant\frac{1}{3\pi^3}\cos^3\frac{\pi}{2(n+1)}. \tag{3.17}$$

故由(3.14)—(3.17)就证得(3.12)与(3.13).

由(3.6)采用类似的方法还可证：

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{1}[H_n(x^2,x)-x^2]^3\sqrt{1-x^2}dx\neq 0.$$

定理 2 的证明 由文[4]可知

$$H_{11,n}(f,x)=Q_n(f,x)+\frac{(1-x)U_n^2(x)}{(n+1)^2}\{2\sum_{k=1}^{n}\frac{f(1)-f(x_{kn})}{1-x_{kn}}$$

$$+\frac{1}{2}[f(1)-f(-1)]\}. \tag{3.18}$$

故有

$$|H_{11,n}(f,x)-f(x)|^p=O(1)\{|Q_n(f,x)-f(x)|^p+\frac{|U_n(x)|^{2p}}{(n+1)^p}[\sum_{k=1}^{n}\omega(\frac{1}{k^2})]^p\}. \tag{3.19}$$

由于((4),(6)式)

$$\frac{1}{(n+1)^2}\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{f(1)-f(x_{kn})}{1-x_{kn}}\right|=O(n^{-1})\sum_{k=1}^{n}\omega(\frac{1}{k^2}). \tag{3.20}$$

又因 $f(x)\in \mathrm{Lip}\alpha$,故有

$$\sum_{k=1}^{n}\omega(\frac{1}{k^2})=\begin{cases}O(1) & \text{当}\frac{1}{2}<\alpha\leqslant 1\\ O(\log n) & \text{当 }\alpha=\frac{1}{2}\\ O(n^{1-2\alpha}) & \text{当 }0<\alpha<\frac{1}{2}\end{cases}. \tag{3.21}$$

这样由(3.18)—(3.21),引理 1 与引理 2 就能证得定理 2 对 $H_{11,n}(f,x)$成立.至于 $H_{12,n}(f,x)$由文[4]的方法可得

$$H_{12,n}(f,x)=Q_n(f,x)+\frac{(1+x)U_n^2(x)}{(n+1)^2}\{2\sum_{k=1}^{n}\frac{f(-1)-f(x_{kn})}{1+x_{kn}}-\frac{1}{2}[f(1)-f(-1)]\}.$$

利用类似的方法可以证明定理对 $H_{12,n}(f,x)$同样成立.

定理 3 的证明 我们仅对 $H_{13,n}(f,x)$与 $H_{15,n}(f,x)$加以证明.而对 $H_{14,n}(f,x)$与 $H_{16,n}(f,x)$可类似证之.

首先,由文[4]知

$$H_{13,n}(f,x)=H_n(f,x)+\frac{U_n^2(x)}{(n+1)^2}[f(1)-H_n(f,1)]. \tag{3.22}$$

利用(3.9),引理 2 及定理 1 就可证得定理对 $H_{13,n}(f,x)$成立.

其次，由于([7])

$$H_{15,n}(f,x)=H_n(f,x)+\frac{3U_n^2(x)}{2n(n+1)^2(n+2)}\sum_{k=1}^{n}f(x_{kn})\left(\frac{2}{1-x_{kn}}+x_{kn}\right), \tag{3.23}$$

注意到

$$\sum_{k=1}^{n}f(x_{kn})\left(\frac{2}{1-x_{kn}}+x_{kn}\right)=O(1)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1-x_{kn}} \tag{3.24}$$

以及

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1-x_{kn}}=\frac{U_n'(1)}{U_n(1)}=\frac{1}{3}n(n+2). \tag{3.25}$$

故由(3.23)—(3.25)，引理 2 及定理 1 即证得定理对 $H_{15,n}(f,x)$ 成立.

类似例 1，当 $p=3$ 时，对于 $f(x)\equiv x$ 及 $i=11,12,15,16$ 均有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{1}|H_{i,n}(x,x)-x|^3\sqrt{1-x^2}dx\neq 0.$$

作者衷心感谢导师孙永生教授的热情指导和帮助.

参 考 文 献

[1] A. K. Varma and J. Prasad, J. Approx. Theory V. 56, 1989, 225—240.

[2] 沈燮昌，数学进展，1983，12：256—282.

[3] G. Szegő, Orthogonal Polynomials, AMS Coll. Publ, New York, 1979.

[4] 郁定国，数学进展，1984，13：47—53.

[5] P. Szasz, Acta Math. Acad. Sci. Hungar., V. 10, 1959, 413—439.