第13卷第3期
1993年8月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION

Vol. 13 No. 3
Aug. 1993

$X_{2\pi}^p$ 空间中三角多项式算子的饱和性*

熊静宜　　杨汝月

（宁夏大学数学系，银川 750021）

1. 引言

设 $(\lambda_{nk})_{n,k\geq 1}$ 为一下三角形矩阵（即当 $k>n$ 时 $\lambda_{nk}=0$），又

$$s[f]=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)=\sum_{k=0}^{\infty}A_k(x)$$

为 $f\in X_{2\pi}^p=L_{2\pi}^p$（当 $1\leqslant p<\infty$）或 $C_{2\pi}$（当 $p=\infty$）的 Fourier 级数. 定义三角多项式算子

$$T_n(f;x)=\sum_{k=0}^{n}\lambda_{nk}A_k(x),$$

其中 $\lambda_{n0}=1$.

易知 $T_n(f;x)$ 的卷积形式是

$$T_n(f;x)=(f*\chi_n)(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x-t)\chi_n(t)dt,$$

其中 $\chi_n(t)=1+2\sum_{j=1}^{n}\lambda_{nj}\cos jt$ 满足条件

$$\|\chi_n\|_{L_{2\pi}^1}=O(1)\ (n=1,2,\cdots),\quad \lim_{n\to\infty}\lambda_{nk}=1\ (k=0,1,2,\cdots).$$

我们有

$$\hat{\chi}_n(k)=\begin{cases}\lambda_{nk}, & 0\leqslant k\leqslant n\\ 0, & k>n.\end{cases}$$

于是 $1-\hat{\chi}_n(k)=1-\lambda_{nk}$.

本文讨论算子列 $\{T_n\}$ 在 $X_{2\pi}^p$ 空间的饱和问题，得到如下结果：

定理　设 $\{\varphi_n\}$ 为收敛于零的正实数序列. 若对 $0<\alpha<1$，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-\lambda_{nk}}{\varphi_n}=k^\alpha\quad(k=1,2,\cdots),$$

且

$$\sum_{k=0}^{n}(k+1)^{1-\alpha}|\Delta_{nk}|=O(\varphi_n),$$

其中 $\Delta_{nk}=\lambda_{nk}-2\lambda_{n(k+1)}+\lambda_{n(k+2)}$，则三角多项式算子列 $\{T_n\}$ 在 $X_{2\pi}^p$ 中饱和，其饱和阶为 $O(\varphi_n)$，饱和类为 $\mathscr{F}(T_n)=\{f\in X_{2\pi}^p\,|\,\tilde{f}\in \mathrm{Lip}(X_{2\pi}^p,\alpha)\}$.

* 1991年8月31日收到.

Nishishiraho[1] 首先在 $C_{2\pi}$ 空间研究了当 $\alpha=1$ 时 $\{T_n\}$ 的饱和性，王斯雷[2]指出并修正了[1]在定理证明中的一个错误，余祥明[3]在 $C_{2\pi}$ 空间对于三角多项式算子的高阶饱和情形进行了讨论，指出 Nishishiraho 的结果是[3]之定理的一个特殊情况，熊静宜[4]将[1]的结果推广到 $L^p_{2\pi}(1\leqslant p<\infty)$ 空间. 本文则是从如下两个方面推广[1]的结果：一方面，极限式

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-\lambda_{nk}}{\varphi_n}=k^\alpha\quad(k=1,2,\cdots)$$

中 k 的指数 α 可在(0,1)中任意取值；另一方面，把函数空间从 $C_{2\pi}$ 扩充到 $X^p_{2\pi}$.

本文的结果与上述各位作者的结果互不包含.

2. 引　理

引理 1　设

$$G_n(t)=\sum_{k=0}^n\Lambda_{nk}\int_t^\pi\frac{\sin(k+1)u}{u^2}du\quad(0\leqslant t\leqslant\pi).$$

若 $\sum_{k=0}^n(k+1)^{1-\alpha}|\Lambda_{nk}|=O(\varphi_n)$，则对 $0<\alpha<1$ 有

$$\int_0^\pi t^\alpha|G_n(t)|dt=O(\varphi_n).$$

证明　显见

$$\int_0^\pi t^\alpha|G_n(t)|dt\leqslant\sum_{k=0}^n|\Lambda_{nk}|\int_0^\pi\frac{|\sin(k+1)t|}{t^{2-\alpha}}dt$$

$$=\sum_{k=0}^n|\Lambda_{nk}|\left(\int_0^{\frac{1}{k+1}}+\int_{\frac{1}{k+1}}^\pi\right)\frac{|\sin(k+1)t|}{t^{2-\alpha}}dt.$$

因为

$$\int_0^{\frac{1}{k+1}}\frac{|\sin(k+1)t|}{t^{2-\alpha}}dt=(k+1)^{1-\alpha}\int_0^1\frac{|\sin x|}{x^{2-\alpha}}dx$$

$$\leqslant(k+1)^{1-\alpha}\int_0^1x^{\alpha-1}dx=\frac{1}{\alpha}(k+1)^{1-\alpha},$$

$$\int_{\frac{1}{k+1}}^\pi\frac{|\sin(k+1)t|}{t^{2-\alpha}}dt=(k+1)^{1-\alpha}\int_1^{(k+1)\pi}\frac{|\sin x|}{x^{2-\alpha}}dx$$

$$\leqslant(k+1)^{1-\alpha}\int_1^{(k+1)\pi}x^{\alpha-2}dx\leqslant\frac{1}{1-\alpha}(k+1)^{1-\alpha}.$$

所以

$$\int_0^\pi t^\alpha|G_n(t)|dt=O\left(\sum_{k=0}^n(k+1)^{1-\alpha}|\Lambda_{nk}|\right)=O(\varphi_n).$$

引理 2(见[5]之命题 9.3.1)　设 $f\in L^1_{2\pi}$ 使 $\tilde{f}\in L^1_{2\pi}$，则 f 的共轭 Fourier 级数是共轭函数 $\tilde{f}$ 的 Fourier 级数.

引理 3　若 $\tilde{f}\in L^1_{2\pi}$ 且 $\tilde{f}\in\mathrm{Lip}(L^1_{2\pi},\alpha)$，则

(i)　$\tilde{\tilde{f}}\in L^1_{2\pi}$；

(ii) $\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\tilde{f}(x+t)-\tilde{f}(x-t)}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}dt=\frac{a_0}{2}-f(x)\qquad$ (a. e.).

下面只证(ii). (i)参见[6]P. 332.

设 $f\in L_{2\pi}^1$ 的 Fourier 级数是

$$s[f]=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx),$$

则其共轭级数为

$$\tilde{s}[f]=\sum_{k=1}^{\infty}(b_k\cos kx-a_k\sin kx).\tag{1}$$

因为 $\tilde{f}\in L_{2\pi}^1$，故由引理 2 知(1)就是 $\tilde{f}$ 的 Fourier 级数. 同理，(1)的共轭级数

$$\tilde{\tilde{s}}[f]=-\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

就是 $\tilde{\tilde{f}}$ 的 Fourier 级数，它也是函数$\frac{a_0}{2}-f(x)$的 Fourier 级数. 于是命题得证.

引理 4(见[5]之定理 12.1.3) 设 $f\in X_{2\pi}^p$. 若奇异积分

$$I_\rho(f;x)=(f*\chi_\rho)(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x-u)\chi_\rho(u)du$$

的核$\{\chi_\rho(x)\}$满足$\lim\limits_{\rho\to\rho_0}\frac{\chi_\rho^{\wedge}(k)-1}{\varphi(\rho)}=\psi(k)$，其中 $\|\chi_\rho\|_{L_{2\pi}^1}\leqslant M$，$\psi(k)$是整数集 $\mathbf{Z}$ 上的函数且满足 $\psi(0)=0$，$\psi(k)\neq0(k\neq0)$，而正函数 $\varphi(\rho)$当 $\rho\to\rho_0$ 时趋于零，则 $I_\rho(f;x)$在 $X_{2\pi}^p$ 中以阶 $O(\varphi(\rho))$饱和.

引理 5(见[5]之定理 12.1.4) 若条件同引理 4，则 $\|I_\rho(f)-f\|_{X_{2\pi}^p}=O(\varphi(\rho))$蕴含

$$f\in V[X_{2\pi}^p,\psi(k)]=\begin{cases}\{f\in C_{2\pi}\mid\psi(k)\hat{f}(k)=\hat{g}(k),\ g\in L_{2\pi}^{\infty}\}\\\{f\in L_{2\pi}^1\mid\psi(k)\hat{f}(k)=\mu^{\vee}(k),\ \mu\in BV_{2\pi}\}\\\{f\in L_{2\pi}^p\mid\psi(k)\hat{f}(k)=\hat{g}(k),\ g\in L_{2\pi}^p(1<p<\infty)\}\end{cases}$$

引理 6(见[5]之引理 11.4.4) 若 $f\in X_{2\pi}^p$，且 $0<\alpha<1$，则 $f\in V[X_{2\pi}^p;|k|^\alpha]$蕴含 $f\in\mathrm{Lip}(X_{2\pi}^p,\alpha)$，即

$$V[X_{2\pi}^p;|k|^\alpha]\subset\{f\in X_{2\pi}^p\mid f\in\mathrm{Lip}(X_{2\pi}^p,\alpha)\}.$$

3. 定理证明

若对$\forall\ f\in\{f\in X_{2\pi}^p\mid\tilde{f}\in\mathrm{Lip}(X_{2\pi}^p,\alpha)\}$，有

$$\|T_n(f)-f\|_{X_{2\pi}^p}=O(\varphi_n),\tag{2}$$

则由引理 4、引理 5、引理 6 知定理为真. 事实上，由引理 4 知，$\{T_n\}$在 $X_{2\pi}^p$ 中以阶 $O(\varphi_n)$饱和是显然的. 若记算子列$\{T_n\}$的饱和类为 $\mathscr{F}(T_n)$，则当(2)式成立时，必有 $f\in\mathscr{F}(T_n)$，从而

$$\{f\in X_{2\pi}^p\mid\tilde{f}\in\mathrm{Lip}(X_{2\pi}^p,\alpha)\}\subset\mathscr{F}(T_n).\tag{3}$$

而当 $f\in\mathscr{F}(T_n)$时，必有 $\|T_n(f)-f\|_{X_{2\pi}^p}=O(\varphi_n)$成立，由引理 5、引理 6 可知

$$\mathscr{F}(T_n)\subset\{f\in X_{2\pi}^p\mid f\in\mathrm{Lip}(X_{2\pi}^p,\alpha)\},$$

再由 Privalov 型定理(即若 $f\in\mathrm{Lip}(X_{2\pi}^p,\alpha)$则 $\tilde{f}\in\mathrm{Lip}(X_{2\pi}^p,\alpha)$)(参见[7])，得

$$\mathscr{F}(T_n) \subset \{f \in X_{2\pi}^p \mid \tilde{f} \in \mathrm{Lip}(X_{2\pi}^p, \alpha)\}. \tag{4}$$

(3)、(4)两式表明

$$\mathscr{F}(T_n) = \{f \in X_{2\pi}^p \mid \tilde{f} \in \mathrm{Lip}(X_{2\pi}^p, \alpha)\}.$$

因此剩下的工作仅是证明(2)式成立.

我们就 p 的不同情况加以讨论.

(1) $p=\infty$,即 $X_{2\pi}^p=C_{2\pi}$.

由于 $f\in C_{2\pi}$ 的 Fourier 级数是

$$s[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k\sin kx),$$

所以 $s[f]$的共轭级数为

$$\tilde{s}[f] = \sum_{k=1}^{\infty}(b_k\cos kx - a_k\sin kx).$$

设

$$\tilde{f}(x) = \int_0^{\pi}[f(x+t) - f(x-t)]\operatorname{ctg}\frac{t}{2}dt. \tag{5}$$

如果对于所有的 x,(5)式的右边是绝对收敛的,而且

$$\int_0^{\pi}[f(x+t) - f(x-t)]\operatorname{ctg}\frac{t}{2}dt$$

是可积函数,则称(5)为 $f\in C_{2\pi}$ 的共轭函数.其实,这并非共轭函数的通常定义(见[5]之定义9.0.1),不过它可以使我们立即获得饱和类的特征.

因为 $\int_0^{\pi}[f(x+t) - f(x-t)]\operatorname{ctg}\frac{t}{2}dt$ 绝对收敛,所以

$$\tilde{f}(x) = \sum_{k=1}^{\infty}(b_k\cos kx - a_k\sin kx) = s[\tilde{f}].$$

从而

$$\tilde{s}[\tilde{f}] = \sum_{k=1}^{\infty}[(-a_k)\cos kx - b_k\sin kx],$$

$$\tilde{s}_n(\tilde{f}) = \sum_{k=1}^{n}[-(a_k\cos kx + b_k\sin kx)] = \sum_{k=1}^{n}[-A_k(x)].$$

因为 $\sum_{k=0}^{n}[\lambda_{nk} - \lambda_{n(k+1)}]\tilde{s}_k(\tilde{f};x) = -\sum_{k=1}^{n}\lambda_{nk}A_k(x)$, 所以

$$T_n(\tilde{s}_n(\tilde{f});x) = -\sum_{k=1}^{n}\lambda_{nk}A_k(x) = \sum_{k=0}^{n}[\lambda_{nk} - \lambda_{n(k+1)}]\tilde{s}_k(\tilde{f};x).$$

再由

$$\tilde{s}_k(\tilde{f};x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}[\tilde{f}(x+t) - \tilde{f}(x-t)]\frac{\cos\frac{t}{2} - \cos(2k+1)\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}dt$$

而得

$$T_n(\tilde{s}_n(\tilde{f});x) = \sum_{k=0}^{n}[\lambda_{nk} - \lambda_{n(k+1)}]\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}[\tilde{f}(x+t) - \tilde{f}(x-t)]\cdot\operatorname{ctg}\frac{t}{2}dt$$

$$-\sum_{k=0}^{n}[\lambda_{nk}-\lambda_{n(k+1)}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}[\tilde{f}(x+t)-\tilde{f}(x-t)]\cdot\frac{\cos(2k+1)\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}dt.$$

因为 $\tilde{f}\in \mathrm{Lip}(C_{2\pi},\alpha)$，所以 $\tilde{s}_n(\tilde{f})=-\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$ 收敛于

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\tilde{f}(x+t)-\tilde{f}(x-t)}{2\mathrm{tg}\frac{t}{2}}dt,$$

即有

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\tilde{f}(x+t)-\tilde{f}(x-t)}{2\mathrm{tg}\frac{t}{2}}dt=-\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

$$=-\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)-\frac{a_0}{2}+\frac{a_0}{2}=\frac{a_0}{2}-f(x).$$

因此

$$T_n(\tilde{s}_n(\tilde{f});x)=[\frac{a_0}{2}-f(x)]-\sum_{k=0}^{n}[\lambda_{nk}-\lambda_{n(k+1)}]$$

$$\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}[\tilde{f}(x+t)-\tilde{f}(x-t)]\frac{\cos(2k+1)\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}dt.$$

因为 $T_n(f;x)=\sum_{k=0}^{n}\lambda_{nk}A_k(x)=-T_n(\tilde{s}_n(\tilde{f});x)+\frac{a_0}{2}$，所以

$$T_n(f;x)-f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}[\tilde{f}(x+t)-\tilde{f}(x-t)]\psi_n(t)dt,$$

其中

$$\psi_n(t)=\frac{1}{\sin\frac{t}{2}}\sum_{k=0}^{n}[\lambda_{nk}-\lambda_{n(k+1)}]\cos(2k+1)\frac{t}{2}$$

$$=\frac{2}{t^2}\sum_{k=0}^{n}\Lambda_{nk}\sin(k+1)t+O(\varphi_n).$$

从而

$$T_n(f;x)-f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[\tilde{f}(x+t)-\tilde{f}(x-t)]\sum_{k=0}^{n}\Lambda_{nk}\frac{\sin(k+1)t}{t^2}dt+O(\varphi_n)$$

$$=-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[\tilde{f}(x+t)-\tilde{f}(x-t)]G_n(t)dt+O(\varphi_n).$$

再由引理 1 得

$$|T_n(f;x)-f(x)|\leqslant\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}|\tilde{f}(x+t)-\tilde{f}(x-t)|\cdot|G_n(t)|dt+O(\varphi_n)$$

$$\leqslant\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\|\tilde{f}(\cdot+t)-\tilde{f}(\cdot-t)\|_{C_{2\pi}}\cdot|G_n(t)|dt+O(\varphi_n)$$

$$=O(\int_0^{\pi}t^{\alpha}|G_n(t)|dt)+O(\varphi_n)$$

$$= O(\varphi_n) + O(\varphi_n) = O(\varphi_n).$$

因此 $\| T_n(f) - f \|_{C_{2\pi}} = O(\varphi_n)$.

(2) $p=1$,即 $X^p_{2\pi}=L^1_{2\pi}$. 由引理 3 之(ii),我们有

$$T_n(\tilde{s}_n(\tilde{f});x) = [\frac{a_0}{2} - f(x)] - \sum_{k=0}^{n}[\lambda_{nk} - \lambda_{n(k+1)}] \cdot$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \frac{[\tilde{f}(x+t) - \tilde{f}(x-t)]\cos(2k+1)\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}dt \qquad \text{(a.e.)}$$

因为 $T_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n}\lambda_{nk}A_k(x) = -T_n(\tilde{s}(\tilde{f});x) + \frac{a_0}{2}$, 所以

$$T_n(f;x) - f(x) \overset{\text{a.e.}}{=} \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi [\tilde{f}(x+t) - \tilde{f}(x-t)]\frac{1}{\sin\frac{t}{2}} \cdot$$

$$\sum_{k=0}^{n}[\lambda_{nk} - \lambda_{n(k+1)}]\cos(2k+1)\frac{t}{2}dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi [\tilde{f}(x+t) - \tilde{f}(x-t)]\sum_{k=0}^{n}\Lambda_{nk}\frac{\sin(k+1)t}{t^2}dt + O(\varphi_n)$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi [\tilde{f}(x+t) - \tilde{f}(x-t)]G_n'(t)dt + O(\varphi_n).$$

从而由广义 Minkowski 不等式得

$$\| T_n(f) - f \|_{L^1_{2\pi}} \leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \| \tilde{f}(\cdot + 2t) - \tilde{f}(\cdot) \|_{L^1_{2\pi}} \cdot |G_n'(t)|dt + O(\varphi_n)$$

$$= O(\int_0^\pi t^\alpha |G_n'(t)|dt) + O(\varphi_n)$$

$$= O(\varphi_n) + O(\varphi_n) = O(\varphi_n).$$

(3) $1<p<\infty$,即 $X^p_{2\pi}=L^p_{2\pi}$. 此时,$\tilde{f}(x)$的共轭函数

$$\tilde{\tilde{f}}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\tilde{f}(x+t) - \tilde{f}(x-t)}{2\mathrm{tg}\frac{t}{2}}dt$$

几乎处处存在,且 $\tilde{\tilde{f}} \in L^p_{2\pi}$. 又$\frac{a_0}{2} - f(x)$与 $\tilde{\tilde{f}}$ 有相同的 Fourier 级数,它几乎处处收敛于$\frac{a_0}{2} - f(x)$,因此几乎处处有

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\tilde{f}(x+t) - \tilde{f}(x-t)}{2\mathrm{tg}\frac{t}{2}}dt = \frac{a_0}{2} - f(x).$$

于是,类似(2)有

$$T_n(f;x) - f(x) \overset{\text{a.e.}}{=} \frac{1}{\pi}\int_0^\pi [\tilde{f}(x+t) - \tilde{f}(x-t)] \cdot \sum_{k=0}^{n}\Lambda_{nk}\frac{\sin(k+1)t}{t^2}dt + O(\varphi_n).$$

因此,对于 $f \in \{f \in X^p_{2\pi} | \tilde{f} \in \mathrm{Lip}(L^p_{2\pi}, \alpha)\}$,由广义 Minkowski 不等式得

$$\| T_n(f) - f \|_{L^p_{2\pi}} \leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \| \tilde{f}(\cdot + 2t) - \tilde{f}(\cdot) \|_{L^p_{2\pi}} \cdot |G_n'(t)|dt + O(\varphi_n)$$

$$= O(\int_0^\pi t^\alpha |G_n'(t)|dt) + O(\varphi_n) = O(\varphi_n).$$

综合上述三种情形即知(2)式成立. 至此定理证毕.

本文得到孙永生教授和陈文忠教授的指导,作者在此谨致谢意.

参 考 文 献

[1] Nishishiraho, T., J. Approx. Th., 24(1978), 208—215.

[2] 王斯雷, 杭州大学学报(自然科学版), 8(1981), 1:7—13.

[3] 余祥明, 数学研究与评论, 6(1986), 1:75—78.

[4] 熊静宜, 宁夏大学学报(自然科学版), 2(1986), 2—8.

[5] Butzer, P. L. and Nessel, R. J., Fourier Analysis and Approximation, Vol. I, Birkhäuser, Basel, and Academic Press, New York, 1971.

[6] А. Ф. Тиман, Теория Приближения Функций Действительного Переменого, Москва, Физматгиз, 1960.

[7] Н. К. бари, Тригонометрические Ряды, Москва, Физматгиз, 1961.

Saturation of Trigonometric Polynomial Operators in the Space $X_{2\pi}^p$

Xiong Jingyi *Yang Ruyue*

(Ningxia Univ, Yinchuan)

Abstract

Let $(\lambda_{nk})_{n,k\geq 1}$ be a lower triangular matrix. Let $f\in X_{2\pi}^p, S[f]$ be its Fourier series

$$S[f]=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)=\sum_{k=0}^{\infty}A_k(x)$$

and

$$T_n(f;x)=\sum_{k=0}^{n}\lambda_{nk}A_k(x),\quad (\lambda_{n0}=1).$$

We prove the following saturation result

Theorem Let $0<\alpha<1$ and $\phi_n\to 0^+$ $(n\to\infty)$. If the following conditions are satisfie

(i) $\lim_{n\to\infty}\frac{1-\lambda_{nk}}{\phi_n}=k^\alpha,\quad (k=1,2,\cdots)$,

(ii) $\sum_{k=0}^{n}(k+1)^{1-\alpha}|\Lambda_{nk}|=O(\phi_n)$,

where $\Lambda_{nk}=\lambda_{nk}-2\lambda_{n(k+1)}+\lambda_{n(k+2)}$, then $\{T_n\}$ is saturated with the order $O(\phi_n)$ and the class $\mathcal{F}(T_n)=\{f\in X_{2\pi}^p|\tilde{f}\in \mathrm{Lip}(X_{2\pi}^p,\alpha)\}$ in $X_{2\pi}^p$.