第13卷第3期　　数学研究与评论　　Vol. 13 No. 3
1993年8月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Aug. 1993

外平面图全色数定理的简单证明*

姚惠能
(杭州大学计算机科学系，310028)

摘　要

1988年，张忠辅等证明了[1]对于$\Delta(G)\geqslant 3$的外平面图G，全色数$\chi_T(G)=\Delta(G)+1$. 本文给出此结论一个简单证明，方法是全新的.

文中所说的图$G(V,E)$，均指的是2－连通简单图. 未定义的术语和符号与文献[2]相同.

定义1　对图$G(V,E)$，使得$V\cup E$中相邻和相关的元素均染为不同颜色的方法，称为G的正常全染色. 使得G为正常全染色的最少颜色数，称为全色数，记为$\chi_T(G)$.

定义2[2]　若一个平面图的顶点均在一个面的边界时，则称之为外平面图，这个面被称为外面，在外面边界上的边被称为外边.

定义3[4]　设G的连通度为$K(G)$，对边$e\in E(G)$，若$K(G-e)<K(G)$，则称e是G的临界边；否则称e为G的非临界边.

为给出文献[1]基本定理的简单证明，引入如下4个引理.

据[3]有，任一个外平面图至少有2个2度点，用反证法不难得到：

引理1　设G是任一外平面图，v_2是G的任一2度点，记v_1,v_3是G中与v_2相邻的2点，则

a.　若边$v_1v_3\in E(G)$，那么$G'=G-v_2$是外平面图；

b.　若边$v_1v_3\notin E(G)$，那么$G'=G+v_1v_3-v_2$是外平面图.

引理2[3]　一个图是外平面图，当且仅当它的任何子图均不是K_4或$K_{2,3}$的剖分.

引理3　若G是(2－连通的)外平面图，则G的任一外边是临界边.

证明　设$e=v_1v_2$是外平面图G的任一外边.

(1)　如$d_G(v_1)$(或$d_G(v_2)$)$=2$，则引理显然成立.

(2)　如G中存在点v_0，使得$v_1v_0,v_0v_2\in E(G)$，易知$G-e-v_0$是不连通的，从而得$K(G-e)=1$，知引理成立.

(3)　如$d_G(v_1)$和$d_G(v_2)$均大于或等于3，而且G中不存在与v_1,v_2均相邻的点. 用反证法，假定$K(G-e)=2$. 沿G的外面边界按顺时针方向记G的点依次为$v_1,v_2,v_3,\cdots,v_v$(其中$v=|V(G)|$)，即$Cv=v_1v_2v_3\cdots v_vv_1$为$G$的外面边界. 取与$v_2$邻接的$d_G(v_2)$个点中足码最大的记为$v_s$. 由取法知$2\leqslant s\leqslant v-2$. 由假定得$K(G-e-v_s)\geqslant 1$.

从而知，在$G-e-v_s$中，沿(原G的)外面边界从v_2到v_{s-1}的路上有一点(记为)v_{si}；从v_{s+1}

* 1991年3月9日收到.

到 v_v 再到 v_1 的路上有一点(记为)v_{sj}，且有(v_{si},v_{sj})路 Q. 可见由 C_v, Q 以及边 v_2v_s 组成的 G 的子图是 K_4 的剖分，与引理 2 矛盾，这是不可能的，从而推得 $K(G-e)=1$，且 v_s 为 $G-e$ 的割点.

综合上述(1)，(2)，(3)，引理 3 证毕.

由此引理知，对 2－连通外平面图 G' 的任一外边 e，$G'-e$ 至少有一个割点，不妨记为 v_0，记 e 的 2 个端点分别为 v_1,v_3. 可见 $G'-e-v_0$ 有且仅有 2 个分别含 v_1,v_3 的连通分支，记含 v_1 的分支为 G_1；含 v_3 的分支为 G_3.

令 $G_i^*=G'[V(G_i)\cup\{v_0\}]$(其中 $i=1,3$，$G'[x]$为顶点子集 x 在 G' 中的导出子图).

由 $d_{G'}(v_0)\leqslant\Delta(G')$；$d_{G_1^*}(v_0)+d_{G_3^*}(v_0)=d_{G'}(v_0)$，则可得下述引理 4.

引理 4. 设 G' 是任一(2－连通的)外平面图，$e=v_1v_3$ 为 G' 的外边，v_0 为 $G'-e$ 的割点，则 $d_{G_1^*}(v_0)$和 $d_{G_3^*}(v_0)$中至少有 1 个小于或等于$[\frac{\Delta(G')}{2}]$(其中$[x]$为 x 的最大整数部分).

基本定理[1] 若 G 为 $\Delta(G)\geqslant3$ 的外平面图，则 $x_T(G)=\Delta(G)+1$.

证明 对点数 v，使用数学归纳法.

当 $v=4$ 时，知 $\Delta(G)\geqslant3$(且 $K(G)=2$)的外平面图 $G\cong K_4-e$. 显然有 $x_T(G)=x_T(K_4-e)=\Delta(G)+1$.

作为归纳假设，假定所有有 $v\geqslant4$ 个点且 $\Delta(G)\geqslant3$ 的外平面图 G，都有 $x_T(G)=\Delta(G)+1$.

令 G 是有 $v+1$ 个点且 $\Delta(G)\geqslant3$ 的外平面图. 不妨设 G 中的一个 2 度点为 v_2，记与 v_2 相邻的 2 点分别为 v_1,v_3. 知 v_1,v_3 的邻接关系必居如下 2 种情形之一：

1. $v_1v_3\in E(G)$；
2. $v_1v_3\notin E(G)$.

现分别讨论如下：

情形 1 若 $v_1v_3\in E(G)$，则令 $G'=G-v_2$，据引理 1，知 G' 为外平面图，v_1v_3 为 G' 的外边. 由引理 3，知 $G'-v_1v_3$ 有割点 v_0，据引理 4(并采用那里相应的记号)，不妨设 $d_{G_3^*}(v_0)=[\frac{\Delta(G')}{2}]$，即在 $G'-v_1v_3$ 中，v_0 与子图 G_3 有$[\frac{\Delta(G')}{2}]$条边关联. 也即 v_0 与 G_3 中的$[\frac{\Delta(G')}{2}]$个点相邻. 这$[\frac{\Delta(G')}{2}]$个点均在 G' 的外面边界上，而且若 $v_0v_3\in E(G_3^*)$，则 G_3^* 为(2－连通图)外平面图；若 $v_0v_3\notin E(G_3^*)$，则 $G_3^*+v_0v_3$ 为(2－连通图)外平面图. 而 v_0v_3 为上述 2 种外平面图的邻界边. 不妨设 $\Delta(G')=\Delta(G)$. 对于 $\Delta(G')=\Delta(G)-1$，证明是类似的且更简单.

由 $|V(G')|=v$，根据归纳假设，对 G' 可以 Δ 用$_2(G')+1(=\Delta(G)+1)$种颜色 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{(\Delta(G))},\alpha_{(\Delta(G)+1)}$ 进行正常全染色，记此全染色法为 σ'，以 $\sigma'(A)=\alpha$ 表示元素 A 染为 α 色. 注意到 G_3^* 中 v_0 关联和相邻的元素的总数至多为 $\Delta(G')$，知在 σ' 下，可使得 $\sigma'(v_1)=\alpha_1$，$\sigma'(v_1v_3)=\alpha_2$，$\sigma'(v_3)=\alpha_3$，$\sigma'(v_0)=\alpha_2$ 且使得子图 G_3^* 中与 v_0 相关和相邻的元素的染色均不为 α_1 色.

由所作，知$\triangle(G')+1(=\Delta(G)+1)$种颜色在 v_1,v_3 处至少各有一种颜色没有出现，不妨分别记为 $\alpha_{\beta1},\alpha_{\beta3}$.

当 $\alpha_{\beta1}\neq\alpha_{\beta3}$ 时，在 σ' 基础上，对于 G 未染色元素可以全染色如下，$\sigma(v_1v_2)=\alpha_{\beta1}$，$\sigma(v_2v_3)=\alpha_{\beta3}$，$\sigma(v_2)=\alpha_2$；对其他元素 A，则 $\sigma(A)=\sigma'(A)$，则得 G 的正常全染色，从而有 $x_T(G)=\Delta(G)+1$.

当 $\alpha_{\beta1}=\alpha_{\beta3}$ 时，在 σ' 基础上，可对 G 未染色(或已染色)元素给予(或换为)如下全染色：对 $G_1^*=G[V(G_1)\cup\{v_0\}]$中的元素 A_1，若 $\sigma'(A_1)=\alpha_1$，则令 $\sigma(A_1)=\alpha_2$；若 $\sigma'(A_1)=\alpha_2$，则令 $\sigma(A_1)=$

a_1；如果 $\sigma'(A_1)=a_i(i\neq 1,2)$，则令 $\sigma(A_1)=\sigma'(A_1)$，且使得 $\sigma(v_1v_2)=a_1,\sigma(v_2v_3)=a_2,\sigma(v_1v_3)=a_{\beta 1}=a_{\beta 3},\sigma(v_2)=a_{\beta 1}$. 则得 G 的正常全染色，所以有 $x_T(G)=\Delta(G)+1$.

情形 2，若 $v_1v_3\in E(G)$，作 $G'=G+v_1v_3-v_2$，据引理 1；G' 为外平面图，v_1v_3 为 G' 的外边. 又由引理 3，4 知，此时完全类似于情形 1 的讨论，可得对 $G'(=G+v_1v_3-v_2)$ 与情形 1 同样的全染色法 σ'. 由于 $v_1v_3\in E(G)$，故在 σ' 基础上，可得对 G 未染色（或已染色）元素给予（或换为）如下全染色 σ：$\sigma(v_1v_2=a_1,\sigma(v_2v_3)=a_2,\sigma(v_2)=a_j(j\neq 1,2,3)$，对 $G_1^*=G'[V(G_1)\cup\{v_0\}]$ 中的元素 A_1，若 $\sigma'(A_1)=a_1$，则令 $\sigma(A_1)=a_2$；若 $\sigma'(A_1)=a_2$，则令 $\sigma(A_1)=a_1$；若 $\sigma'(A_1)=a_i(i\neq 1,2,)$，则令 $\sigma(A_1)=\sigma'(A_1)$. 则得 G 的正常全染色，从而同样有 $X_T(G)=\Delta(G)+1$.

综合情形 1，情形 2，基本定理[1]证毕.

参 考 文 献

[1] 张忠辅、张建勋、王建方，中国科学 A 辑，1988，6：595—600.

[2] J. A Bondy and U. S. R Murty, *Graph Theory with Application*, the Maclmillon Press Ltd 1976.

[3] 李慰萱，图论，湖南科学技术出版社，1980，4：206—211

[4] 姚惠能，杭州大学学报（自然科学版），1990，3：309—314.

A Simple Proof of the Outerplanar's Total Chromatic Number Theorem

Yao Huineng

(Dept. of Math., Hangzhou Univ., Hangzhou)

Abstract

We give a new and simple proof for $x_T(G)=\Delta(G)+1$, if G is an outerplanar with $\Delta(G)\geq 3$.