第13卷第3期 1993年8月
数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol. 13 No. 3 Aug. 1993

关于线性规划问题惩罚因子的范围估计*

李国君
(烟台师范学院数学系,264000)

设线性规划问题的标准形式

$$\min\{z \mid z = cx,\ Ax = b,\ x \geqslant 0\}. \tag{1}$$

文[1]证明了约束线性方程组的增广矩阵$[A\ b]$经 m 次初等行变换即可化成形如 $A_1=(A^{(1)}\ b^{(1)})$ 的矩阵,这里 $A^{(1)}=(a_{ij}^{(1)})_{m\times n}$,$A^{(1)}$ 的第 $J_i\,(i=2,3,\cdots,m)$列为 m 维列向量 $e_i=(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)^T$,其中"1"位于 i 维,$b^{(1)}=(b_1^{(1)},0,\cdots,0)^T$. 其中 $b_1^{(1)}$ 为正数. 于是问题(1)可化成如下的等价形式

$$\min\{z \mid z = cx,\ A^{(1)}x = b^{(1)},\ x \geqslant 0\}. \tag{2}$$

对问题(2)用惩罚因子法,我们有

定理1 当 M 充分大时,若(2)的最优解存在,则辅助线性规划问题

$$\min\{z \mid z = \bar{c}\bar{x},\ \bar{A}^{(1)}\bar{x} = b^{(1)},\ \bar{x} \geqslant 0\} \tag{3}$$

的最优解一定是问题(2)的最优解. 其中 $\bar{A}^{(1)}=(e_1,A^{(1)})$,$\bar{c}=(M,c_1,\cdots,c_n)$,$\bar{x}=(x_0,x_1,\cdots,x_n)^T$. M 称惩罚因子.

下面考察惩罚因子多大时可保证辅助线性规划问题和原设线性规划问题有相同的最优解.

在此约定$[A\ b]$是整数矩阵. 并考虑问题

$$\min\{z \mid z = \bar{c}\bar{x},\ \bar{A}\bar{x} = b,\ \bar{x} \geqslant 0\}, \tag{4}$$

其中 $\bar{A}=(e_1,A)$,$\bar{c}=(M,c_1,\cdots,c_n)$,$\bar{x}=(x_0,x_1,\cdots,x_n)^T$.

规定问题(1)的规模为

$$L = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\log_2(1+|a_{ij}|) + \sum_{i=1}^{m}\log_2(1+|b_i|) + \log_2 mn + 1.$$

引理[3] $[A\ b]$的任一非奇异子矩阵 B 满足

$$1 \leqslant |\det(B)| \leqslant 2^L/mn.$$

定理2 若问题(1)的最优解存在,则当 $M \geqslant (2^{2L}/mn)\cdot\max|c_j|$时,(4)的最优解必是(1)的最优解.

证明 若 B 是(4)的含人工向量的可行基.

$$T(B) = \begin{pmatrix} \bar{c}_B B^{-1}\bar{A} - \bar{c} & \bar{c}_B B^{-1} b \\ B^{-1}\bar{A} & B^{-1}b \end{pmatrix},$$

记 $B^{-1}\bar{A}=(P_0,P_1,\cdots,P_n)$,其中 $P_j=(p_{1j},p_{2j},\cdots,p_{mj})^T$.

* 1991年3月25日收到. 92年11月17日收到修改稿.

1) 若 $p_{1j}<0$, $j=1,2,\cdots,n$. 此时必有 $x_0=0$.

1° 若 $p_{1j}=0$, $j=1,2,\cdots,n$. 则第一个方程是赘余的.

2° 若有 $p_{1j}<0$ $(1\leqslant j\leqslant n)$,因 $A_j=BP_j$,由克莱姆法则

$$p_{1j}=\det(B_1)/\det(B)=-|\det(B_1)|/|\det(B)|\leqslant -mn/2^L.$$

$$|p_{ij}|=|\det(B_i)|/|\det(B)|\leqslant 2^L/mn,\ i=2,3,\cdots,m.$$

于是,$\lambda_j=\bar{c}_BB^{-1}A_j-c_j=Mp_{1j}+c_{J_2}p_{2j}+\cdots+c_{J_m}p_{mj}-c_j\leqslant -mn/2^L\cdot 2^{2L}/mn^2\cdot\max|c_j|+m\cdot\dfrac{2^L}{mn}\cdot\max|c_j|=0$. 从而,目前基解即(4)的基最优解. 因 $x_0=0$,故也是(1)的最优解.

2) 若存在 $p_{1J_1}>0$,由克莱姆法则

$$p_{1J_1}=|\det(B_1)|/|\det(B)|\geqslant mn/2^L,$$

$$|p_{iJ_1}|=|\det(B_i)|/|\det(B)|\leqslant 2^L/mn,\ i=2,3,\cdots,m.$$

于是,$\lambda_{J_1}=\bar{c}_BB^{-1}A_{J_1}-c_{J_1}>2^L/n\cdot\max|c_j|-2^L/n\cdot\max|c_j|=0$. 这说明目前基不是(4)的最优基. 从而,(4)的最优基必使 $p_{1j}\leqslant 0$ $(j=1,2,\cdots,n)$,由 1),此基对应的最优解也即(1)的最优解.

若 B 是(4)的不含人工向量的可行基,λ_0 是相应于 B 的 x_0 的判定系数,则

$$\begin{aligned}\lambda_0 &= \bar{c}_BB_1^{-1}e_1-M\leqslant|\bar{c}_BB^{-1}e_1|-M=1/|\det(B)||\bar{c}_BB^{*}e_1|-M\\ &\leqslant|c_{J_1}||\det(B_{11})|+|c_{J_2}||\det(B_{12})|+\cdots+|c_{J_m}||\det(B_{1m})|-M\\ &\leqslant\frac{2^L}{n}\cdot\max|c_j|\cdot\left(1-\frac{2^L}{mn}\right)<0.\end{aligned}$$

这里 B^* 表示 B 的伴随矩阵,B_{1j} $(j=1,\cdots,m)$是 B^* 的第一列的元素. 这说明退出基的人工变量不会再进入基. 证毕.

对辅助线性规划问题

$$\min\{z|z=\hat{c}\hat{x},\ \hat{A}\hat{x}=b,\ \hat{x}\geqslant 0\},\tag{5}$$

其中 $\hat{A}=(A\ E)$,$\hat{c}=(c_1,\cdots,c_n,M,\cdots,M)$,$\hat{x}=(x_1,\cdots,x_n,x_{n+1},\cdots,x_{n+m})^T$,我们有

定理 3 若(1)的最优解存在,则当 $M\geqslant\dfrac{2^{2L+1}}{mn^2}\max|c_j|$时,(5)的最优解必是(1)的最优解.

证明 因(1)的解必是(5)的解,所以

$$\min\{z|z=\hat{c}\hat{x},\hat{A}\hat{x}=b,\hat{x}\geqslant 0\}\leqslant\min\{z|z=cx,Ax=b,x\geqslant 0\}.$$

设(1)的基最优解 $X_B=(x_{J_1},\cdots,x_{J_m})$,则 $x_{J_i}\leqslant\dfrac{2^L}{mn}$. 于是 $z=c_{J_1}x_{J_1}+\cdots+c_{J_m}x_{J_m}\leqslant\dfrac{2^L}{n}\max|c_j|$.

若(5)的基最优解中存在 $x_{n+i_0}>0$,则 $x_{n+i_0}\geqslant\dfrac{mn}{2^L}$. 于是 $z=c_1x_1+\cdots+c_nx_n+M(x_{n+1}+\cdots+x_{n+m})\geqslant\dfrac{mn}{2^L}M-\dfrac{2^L}{mn}(m-1)\max|c_j|>\dfrac{mn}{2^L}\cdot\dfrac{2^{2L+1}}{mn^2}\cdot\max|c_j|-\dfrac{2^L}{n}\max|c_j|=\dfrac{2^L}{n}\max|c_j|$. 从而 $\min\{z|z=\hat{c}\hat{x},\hat{A}\hat{x}=b,\hat{x}\geqslant 0\}>\min\{z|z=cx,Ax=b,x\geqslant 0\}$,矛盾.

参 考 文 献

[1] 丁克诠等,关于线性规划初始基本可行解的构造,大连工学院学报,12(1985),16—18.

[2] 何岳山,求线性规划问题初始可行基的一种方法,应用数学,3(1990),88—90.

[3] 林治勋,线性规划与网络流,郑州大学数学系,1985 年.