第13卷第3期 数学研究与评论 Vol. 13 No. 3
1993年8月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Aug. 1993

格序模的 f—复盖*

朱作桐 周伟
(南京师范大学数学系,210024) (四川师范大学数学系,成都610066)

J. Martinez 首先利用同调的方法研究了格序结构,讨论了偏序模的张量积[1],[2]. W. Powell 和 A. Bigard 分别在 1981 年和 1973 年研究了格序模的自由对象[3],[4],描述了自由 f—模的结构. 作者推广并且改进了他们的工作,讨论了格序模的 f—张量积[5]. 本文讨论格序模的 f—模复盖,给出复盖函子,f—张量积函子和嵌入函子的关系.

一 引言

设 R 是有单位元的偏序环,M 是 R—模. 若 M 是 l—群且 $M^+R^+\subseteq M$,则 M 称为格序模,其中 M^+ 是 M 的正锥. 设 M 是格序模,若 $x\wedge y=0$,有 $xr\wedge y=0$,对任意 $r\in R$,则 M 称为 f—模. M 是 f—模的充要条件是 M 能嵌入到全序模的积.

设 R 是有单位元的 f—环,X 是集合,f—模 F 称为 X 上的自由 f—模,若

(1) 存在内射 $v:X\to F$;

(2) 若 K 是任意 f—模,$\varphi:X\to F$ 是一个映射,则存在唯一的 l—模同态 $\varphi':F\to K$,使 $v\varphi=\varphi'$.

设 R 是有单位元的格序环,M 是右 R—格序模,N 是左 R—格序模,L 是交换 l—群. 若 θ: $M\times N\to L$ 是 R—双加法函数[6],且对任意 $m\in M^+,n\in N^+$,$(\cdot,n)\theta$ 和 $(m,\cdot)\theta$ 是 l—映射,则 θ 称为 l—R 双加法函数[5],(L,θ) 称为 M 和 N 的 f—张量积,若 L 是交换 l—群,θ 是 l—R 双加法函数,且满足泛映射问题. 作者证明在这些条件下,格序模的 f—张量积是存在的,且在同构意义下是唯一的[5].

本文给出格序模的 f—模复盖的定义,证明 f—模复盖的存在性与唯一性,从而推广了 J. Martinez 关于 l—群的向量格复盖的有关结果[1].

二 格序模的 f—模复盖

定义 设 R 是有单位元的左 f—环,M 是 R—格序模. M 的 f—模复盖 $V(M)$ 是一个 f—模和 l—模同态 $\theta_M:M\to V(M)$ 且满足,若 φ 是 M 到 f—模 W 的任意 l—模同态,则唯一地存在

* 1991年10月31日收到. 1993年4月18日收到修改稿.

l—模同态 $\varphi^*:V(M)\to M$，使 $\theta_M\varphi^*=\varphi$.

定理 1 设 M 是有单位元的左 f—环 R 上的格序模，则 M 的 f—模复盖 $V(M)$ 是存在的，且在同构意义下是唯一的.

证明 设 F_M 是 M 上的自由 f—模，令 N_M 是形如 $(m_1\sigma\vee m_2\sigma)-(m_1\vee m_2)\sigma$，$(m_1\sigma\wedge m_2\sigma)-(m_1\wedge m_2)\sigma$ 的元素生成的凸 l—子模，其中 $\sigma:M\to F_M$ 是嵌入映射. 定义 $\theta_M:M\to V(M)$，由 $m\theta_M=m\sigma+N_M$ 给出，其中 $V(M)=F_M/N_M$. 则 θ_M 是 l—模同态，$V(M)$ 是 f—模，且 $(V(M),\theta_M)$ 是 M 的 f—模复盖.

定理 2 设 R 是有单位元的左 f—环，X 是集合，$M=\oplus_X R$ 是 X 上的平凡序的自由模，则 M 的 f—模复盖 $V(M)$ 是存在的，且在同构意义下是唯一的.

定理 3 设 R 是有单位元的交换 f—环，M 是 R 上的格序模，则 $R\otimes_f M$ 是 f—模. 如果 $\varphi:M\to W$ 是 l—模映射，则存在唯一的 l—模同态 $\varphi^*:R\otimes_f M\to W$，使 $(1\otimes m)\varphi^*=m\varphi$，对任意 $m\in M$.

定理 4 设 M 是有单位元交换 f—环 R 上的格序模，F 是 M 上的自由 f—模，则 $V(F)=R\otimes_f M$.

定理 5 设 M 是有单位元左 f—环 R 上的格序模，$\{M_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$ 是 M 的 l—子模簇，且 M_α 在 $V(M_\alpha)$ 中大和 $M=\bigcup\{M_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$，则 $V(M)=\bigcup(V(M_\alpha)|\alpha\in\Lambda\}$ 且 M 在 $V(M)$ 中大.

三 复盖函子、张量积函子与嵌入函子的关系

定理 6 设 M_i 是有单位元的交换 f—环 R 上的格序模，又 $V(M_i)$ 是 M_i 的 f—模复盖，则 $V(M_1)\otimes V(M_2)=V(M_1\otimes_f M_2)$.

令 $\mathbf{M}$ 是格序模和 l—模同态范畴，$\mathbf{F}$ 是 f—模和 l—模同态范畴，则 $\mathbf{F}$ 是 $\mathbf{M}$ 的子范畴. 令 $E:\mathbf{F}\to\mathbf{M}$ 是嵌入，则 E 是一个函子，称为嵌入函子；令 $V:\mathbf{M}\to\mathbf{F}$ 是一个函数，对任意格序模 M，$V(M)$ 是 M 的 f—模复盖，则 V 是一个函子，称为复盖函子.

定理 7 (V,E) 是一对伴随函子.

参 考 文 献

[1] J. Martinez, *Tensor products of partially ordered groups*, Pacific J. Math., 41(1972), 771—789.

[2] J. Martinez, *A Hom—functor for lattice ordered group*, Pacific J. Math. 48(1973), 169—183.

[3] W. Powell, *Projectives in a class of lattice ordered modules*, Algebra Univ., 13(1981), 24—40.

[4] A. Bigard, *Free lattice ordered modules*, Pacific J. Math., 49(1973), 1—6.

[5] 周伟，朱作桐，偏序模的 f—张量积，南京师大学报 1991，2.