第13卷第4期 1993年11月 | 数学研究与评论 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION | Vol. 13 No. 4 Nov. 1993

双曲方程的一个反问题*

王 秀 兰

(哈尔滨师范大学数学系,150080)

摘 要

用(E_{phHa})代表如下的双曲方程的初一边值问题:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+(p(x)-\frac{\partial^2}{\partial x^2})u=0 \qquad (0<t<\infty,0<x<1),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}-hu|_{x=0}=0,\quad \frac{\partial u}{\partial x}+Hu|_{x=0}=0 \qquad (0<t<\infty),$$

$$u|_{t=0}=a(x),\quad u_t|_{t=0}=0 \qquad (0<x<1).$$

设 $u(x,t)$ 是其解,求满足

$$u(t,\xi)=v(t,\xi) \quad (0<t<\infty,\xi=0,1)$$

的所有 (q,i,I,b),其中 $v(t,x)$ 是(E_{qIIb})的解.

主要结果是如下的定理

定理 1 设 $u(t,x)$,$v(t,x)$ 分别是(E_{phHa})和(E_{qiIb})的解,则

$$u(t,\xi)=v(t,\xi) \quad (0<t<\infty,\xi=0,1)$$

的充要条件是 (q,i,I) 满足关系式

$$q=p+2\frac{d}{dx}(G\cdot\Phi),$$

$$i=h+(G\cdot\Phi)(0),$$

$$I=H-(G\cdot\Phi)(1),$$

其中 G,Φ 文中所示.

考查如下问题:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+(p(x)-\frac{\partial^2}{\partial x^2})u=0 \qquad (0<t<\infty,0<x<1), \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}-hu|_{x=0}=0,\quad \frac{\partial u}{\partial x}+Hu|_{x=1}=0 \qquad (0<t<\infty), \tag{1.2}$$

$$u|_{t=0}=a(x),\quad u_t|_{t=0}=0 \qquad (0<x<1), \tag{1.3}$$

此处 $p(x)\in C^1[0,1]$,$h\in R$,$H\in R$,$a(x)\in L^2(0,1)$. 为简单计,用(E_{phHa} 代表(1.1),(1.2),(1.3),用(A_{phH})代表具有边界条件(1.2)的微分算子 $(p(x)-\frac{\partial^2}{\partial x^2})$ 在 $L^2(0,1)$ 中的映射. $\{\lambda_n\}$ $n=0,1,\cdots$,$\{\varphi(\cdot,\lambda_n)\}$ $n=0,1,\cdots$,分别代表它的特征值和特征函数.

* 1991年6月28日收到. 1993年8月27日收到修改稿.

定义 1 对 $a(x)\in L^2(0,1)$，若存在 N 个 λ_n，使 $(a,\varphi(\cdot,\lambda_n))=0$，则称 N 为 a 关于 $(\mathrm{A_{phH}})$ 的退化数字，其中 $(\cdot,\cdot)$ 表示内积.

以下考虑 $1\leqslant N<\infty$ 为有限数的情形. 设 $(a,\varphi(\cdot,\lambda_{n_j}))=0$，$(1\leqslant j\leqslant N)$

$$\Phi=\Phi(x)\overset{t}{=}(\varphi(x,\lambda_{n_1}),\cdots,\varphi(x,\lambda_{n_N})),$$

$$A=\begin{pmatrix}\lambda_{n_1} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_{n_N}\end{pmatrix}.$$

考虑常微分方程组

$$\frac{d^2G}{dx^2}=\left[\left(2\frac{d}{dx}(G\cdot\Phi)+p\right)E-A\right]G, \tag{1.4}$$

此处 E 为单位矩阵，$G\cdot\Phi=\sum_{j=1}^{N}g_j(x)\varphi(x,\lambda_{n_j})G\overset{t}{=}(g_1,\cdots,g_N)$

定理 1 设 $u(t,x)$，$v(t,x)$ 分别是 $(\mathrm{E_{phHa}})$ 和 $(\mathrm{E_{qiIb}})$ 的解，则

$$u(t,\xi)=v(t,\xi)\quad(0<t<\infty,\ \xi=0,1) \tag{1.5}$$

的充要条件是 (q,i,I) 满足关系式

$$q=p+2\frac{d}{dx}(G\cdot\Phi),$$

$$i=h+(G\cdot\Phi)(0),$$

$$I=H-(G\cdot\Phi)(1),$$

其中 G 为 (1.4) 的解.

设 $\{\mu_m\}$ $m=0,1,\cdots$，$\{\psi(\cdot,\mu_m)\}$ $m=0,1,\cdots$ 分别为 $(\mathrm{A_{qiI}})$ 的特征值和特征函数，将特征函数正规化，使

$$\varphi(0,\lambda_n)=\psi(0,\mu_m)=1,\ n,m=0,1,\cdots.$$

记

$$\rho_n=\int_0^1\varphi^2(x,\lambda_n)dx,$$

$$\sigma_m=\int_0^1\psi^2(x,\mu_m)dx.$$

将 $(\mathrm{E_{phHa}})$ 及 $(\mathrm{E_{qiIb}})$ 的解 $u(t,x)$ 和 $v(t,x)$ 分别用特征函数展开，得

$$u(t,x)=\sum_{n=0}^{\infty}(e^{-\sqrt{-\lambda_n}t}+(e^{\sqrt{-\lambda_n}t})(a,\varphi)/2\rho_n\varphi(x,\lambda_n),$$

$$v(t,x)=\sum_{m=0}^{\infty}(e^{-\sqrt{-\mu_m}t}+e^{\sqrt{-\mu_m}t})(b,\psi)/2\sigma_m\psi(x,\mu_m).$$

由 (1.5)，有

$$\sum_{n=0}^{\infty}(e^{-\sqrt{-\lambda_n}t}+e^{\sqrt{-\lambda_n}t})(a,\varphi)/2\rho_n=\sum_{m=0}^{\infty}(e^{-\sqrt{-\mu_m}t}+e^{\sqrt{-\mu_m}t})(b,\psi)/2\sigma_m\quad(0<t<\infty)$$

及

$$\sum_{n=0}^{\infty}(e^{-\sqrt{-\lambda_n}t}+e^{\sqrt{-\lambda_n}t})(a,\varphi)/2\rho_n\varphi(1,\lambda_n)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty}(e^{-\sqrt{-\mu_m}t} + e^{\sqrt{-\mu_m}t})((b,\psi)/2\sigma_m)\psi(1,\mu_m) \quad (0 < t < \infty)$$

因 λ_n 为单根，且 $(a,\varphi(\cdot,\lambda_n))\neq 0$，当 $n\neq n_j$ 时，故有

$$\lambda_n = \mu_{m(n)}$$

$$(a,\varphi)/\rho_n = (b,\psi)/\sigma_{m(n)} \neq 0 \quad (n \neq n_j).$$

又因为

$$\lambda_n^{\frac{1}{2}} = n\pi + O(\frac{1}{n}) \quad n \to +\infty,$$

$$\mu_m^{\frac{1}{2}} = m\pi + O(\frac{1}{m}) \quad m \to +\infty.$$

所以

$$m(n) = n,$$

$$\varphi(1,\lambda_n) = \psi(1,\mu_n) \quad (n \neq n_j).$$

为证定理 1，需如下几个引理.

引理 1 设 $D=\{(x,y)|0<y<x<1\}$，则对任意的 $p,q\in C^1(0,1]$，及 $i,h\in R$，存在唯一的 $k=k(x,y)\in C^1(\overline{D})$ 满足

$$k_{xx} - k_{yy} + p(y)k = q(x)k \qquad (x,y) \in \overline{D}, \tag{2.1}$$

$$k_{xx} = (i-h) + \frac{1}{2}\int_0^x (q(s) - p(s))ds \quad (0 \leqslant x \leqslant 1), \tag{2.2}$$

$$k_y(x,0) = hk(x,0) \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1). \tag{2.3}$$

引理 2 对引理 1 中的 k，记

$$\Psi(x,\lambda) = \varphi(x,\lambda) + \int_0^x k(x,y)\varphi(y,\lambda)dy \quad (\lambda = \lambda_n), \tag{2.4}$$

则 $\Psi=\Psi(x,\lambda)$ 满足

$$(q(x) - \frac{d^2}{dx^2})\Psi = \lambda\Psi \quad (0 \leqslant x \leqslant 1), \tag{2.5}$$

$$\Psi(0,\lambda) = 1, \ \Psi'(0,\lambda) = i. \tag{2.6}$$

引理 3 $u(t,\xi)=v(t,\xi)$ $(0<t<\infty,\xi=0,1)$ 的充要条件是存在某 $\{c_j\}$ $j=1,\cdots,N$，$\{d_j\}$ $j=1,\cdots,N$，$c_j,d_j\in R(j=1,2,\cdots,N)$ 及 $k=k(x,y)\in C^2(\overline{D})$ 使

$$k_{xx} - k_{yy} + p(y)k = q(x)k, \tag{2.7}$$

$$k_{xx} = (i-h) + \frac{1}{2}\int_0^x (p(s) - q(s))ds, \tag{2.8}$$

$$k_y(x,0) = hk(x,0), \tag{2.9}$$

$$k(1,y) = \sum_{j=1}^{N} c_j\varphi(y,\lambda_{n_j}), \tag{2.10}$$

$$k_x(1,y) = \sum_{j=1}^{N} d_i\varphi(y,\lambda_{n_j}). \tag{2.11}$$

引理 4 对给定的 p,q,h,i,c_j 及 d_j，方程(2.7)，(2.9)，(2.10)，(2.11)的解 $k\in c^2(\overline{D})$ 唯一，且 $k(x,y) = \sum_{j=1}^{N} g_j(x)\varphi(y,\lambda_{n_j})$. 此处 $g_j=g_j(x)$ $(1\leqslant j\leqslant N)$ 是如下问题的解：

$$(\lambda_{n_j} + \frac{d^2}{dx^2})g_j = q(x)g_j, \tag{2.12}$$

$$g_j(1) = c_j, \tag{2.13}$$

$$g_j'(1) = d_j. \tag{2.14}$$

以上引理的证明,可参考[1].

定理 1 的证明 由引理 3 和引理 4 知,

$$u(t,\xi) = v(t,\xi) \quad (0 < t < \infty, \xi = 0,1)$$

的充要条件是存在(2.12)—(2.14)的解 $g_j \in C^2(0,1)$,使

$$\sum_{j=1}^{N} g_j(x)\varphi(x,\lambda_{n_j}) = (i-h) + \frac{1}{2}\int_0^x (q(s)-p(s))ds.$$

记 $G \overset{t}{=} (g_1,\cdots,g_N)$,则上式右端为 $G \cdot \Phi$,故有

$$G \cdot \Phi = (i-h) + \frac{1}{2}\int_0^x (q(s)-p(s))ds.$$

于是$\frac{d}{dx}(G \cdot \Phi) = \frac{1}{2}(q(x)-p(x))$,从而

$$q = p + 2\frac{d}{dx}(G \cdot \Phi),$$

$$i = h + (G \cdot \Phi)(0),$$

$$(G \cdot \Phi)(1) = (i-h) + \frac{1}{2}\int_0^x (q(s)-p(s))ds = k(1,1).$$

由[1]知

$$I = H - K(1,1).$$

故 $I = H - (G \cdot \Phi)(1)$.

将 $q = 2\frac{d}{dx}(G \cdot \Phi) + p$ 代入$(\lambda_{n_j} + \frac{d^2}{dx^2})g_j = q(x)g_j$ 中,得

$$(\lambda_{n_j} + \frac{d^2}{dx^2})g_j = (2\frac{d}{dx}(G \cdot \Phi) + p)g_j.$$

即

$$\frac{d^2}{dx^2}G = (2\frac{d}{dx}(G \cdot \Phi) + p)E - A]G.$$

反之,设 G 是(1.4)的某个解,即

$$\frac{d^2G}{dx^2} = [(2\frac{d}{dx}(G \cdot \Phi) + p)E - A]G,$$

亦即

$$\frac{d^2g_j}{dx^2} = [(2\frac{d}{dx}(G \cdot \Phi) + p - \lambda_j]g_j.$$

而 $q = 2\frac{d}{dx}(G \cdot \Phi) + p$,故有$\frac{d^2g_j}{dx^2} = (q-p+p-\lambda_j)g_j = (q-\lambda_j)g_j$. 即$(\lambda_j + \frac{d^2}{dx^2})g_j = qg_j$,又$\frac{d}{dx}(G \cdot \Phi) = \frac{1}{2}(q-p)$,积分得

$$G \cdot \Phi(x) - G \cdot \Phi(0) = \frac{1}{2}\int_0^x (q(s)-p(s))ds,$$

$$\sum_{i=1}^{N} g_j \varphi(x, \lambda_{n_j}) = G \cdot \Phi = G \cdot \Phi(0) + \frac{1}{2}\int_0^x (q(s) - p(s))ds.$$

$$= i - h + \frac{1}{2}\int_0^x (q(s) - p(s))ds.$$

证毕.

定义 2　在定义 1 中,若 $N=0$,即 a 与 A_{pnH} 的任何特征函数不正交,则称 a 是(A_{phH})的生成元.

定理 2　由 $u(t,\xi)=v(t,\xi)$ $(0<t<\infty, \xi=0,1)$ 有 $(q,i,I,b)=(p,h,H,a)$ 的充要条件是 a 是(A_{phH})的生成元.

证明类似于[1]的推论 1,略.

对 $\alpha \in C_+^3[0,1]=\{\alpha \in C^3(0,1], \alpha(x)>0, x\in[0,1]\}$ 及 $a\in L^2(0,1)$,考查方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\alpha(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) \quad (0<t<\infty, 0<x<1), \tag{3.1}$$

边界条件为

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=1} = 0 \quad (0<t<\infty), \tag{3.2}$$

初始条件为

$$u|_{t=0} = a(x),\ u_t|_{t=0} = 0 \quad (0<x<1), \tag{3.3}$$

为简单记,用($E_{\alpha a}$)记问题(3.1)－(3.3),(A_α)代表具有边界条件(3.2)的微分算子 $-\frac{\partial}{\partial x}\left(\alpha(x)\frac{\partial}{\partial x}\right)$ 在 $L^2(0,1)$ 中的映射.

定义 3　如果 $a\in L^2(0,1)$ 与常数函数以外的其他特征函数都不正交,则称 a 是 A_α 的弱生成元.

定理 3　设 $\alpha, a \in C_+^3[0,1]\times L^2(0,1)$,$a$ 是(A_α)的弱生成元,$u=u(t,x)$ 是($E_{\alpha a}$)的解,则对任何 $(\beta,b)\in C_+^3[0,1]\times L^2(0,1)$,当

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\alpha(x)}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\beta(x)}}, \tag{3.4}$$

时,若

$$u(t,\xi) = v(t,\xi) \quad (0<t<\infty,\ \xi=0,1), \tag{3.5}$$

则 $(\beta,b)=(\alpha,a)$. 此处 $v(t,x)$ 是($E_{\beta,b}$)的解.

证明　令

$$z = z(x) = \int_0^x \frac{ds}{\sqrt{\alpha(x)}}, \tag{3.6}$$

$$\tilde{u}(t,z) = u(t,x)\alpha(x)^{1/4}, \tag{3.7}$$

则

$$u(t,x) = \tilde{u}(t,z)\alpha(x)^{-\frac{1}{4}}.$$

经过简单计算,可知($E_{\alpha a}$)变为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2}+\left(p(z)-\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\tilde{u}=0 & (0<t<\infty,0<z<l),\\[2mm] \dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial z}-h\tilde{u}\big|_{z=0}=0 & (0<t<\infty),\\[2mm] \dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial z}+H\tilde{u}\big|_{z=l}=0 & (0<t<\infty),\\[2mm] \tilde{u}\big|_{t=0}=\tilde{a}(z),\ \tilde{u}_t\big|_{t=0}=0 & (0<x<l),\end{cases}$$

其中

$$\begin{cases}p(z)=f''(z)/f(z),\\ f(z)=\alpha(x)^{1/4},\\ \tilde{a}(z)=a(x)f(z),\\ h=\dfrac{f'(0)}{f(0)},\\ H=-\dfrac{f'(l)}{f(l)},\\ l=\displaystyle\int_0^1\frac{ds}{\sqrt{\alpha(s)}}.\end{cases}\tag{△}$$

同样,令

$$w=w(y)=\int_0^y\frac{ds}{\sqrt{\beta(s)}},$$

$$\tilde{v}(t,w)=v(t,y)\beta(y)^{1/4},$$

则

$$v(t,y)=\tilde{v}(t,w)\beta(y)^{-1/4}.$$

于是可变为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial t^2}+\left(q(w)-\dfrac{\partial^2}{\partial w^2}\right)\tilde{v}=0 & (0<t<\infty,0<w<l),\\[2mm] \dfrac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial w}-i\tilde{v}\big|_{w=0}=0 & (0<t<\infty),\\[2mm] \dfrac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial w}+I\tilde{v}\big|_{w=l}=0 & (0<t<\infty),\\[2mm] \tilde{v}\big|_{t=0}=\tilde{b}(w),\quad \tilde{v}_t\big|_{t=0}=0 & (0<w<l),\end{cases}$$

其中

$$\begin{cases}q(w)=g''(w)/g(w),\\ g(w)=\beta(y)^{1/4},\\ \tilde{b}(w)=b(y)g(w),\\ i=g'(0)/g(0),\\ I=-g'(l)/g(l).\end{cases}\tag{△△}$$

由(3.5)式有

$$\alpha(0)^{-1/4}\tilde{u}(t,0)=\beta(0)^{-1/4}\tilde{v}(t,0)\quad(0<t<\infty),\tag{3.6}$$

$$\alpha(1)^{-1/4}\tilde{u}(t,l)=\beta(1)^{-1/4}\tilde{v}(t,l)\quad(0<t<\infty).\tag{3.7}$$

设 λ_n 及 $\varphi(\cdot,\lambda_n)$ $n=0,1,2\cdots$，分别为(A_α)的特征值和特征函数；μ_m 及 $\Psi(\cdot,\mu_m)$ $m=0,1,2,\cdots$，分别为(A_β)的特征值和特征函数. 将特征函数正规化为

$$\varphi(0,\lambda_n)=\psi(0,\mu_m)=1,\ n,m=0,1,2,\cdots,$$

则(A_{phH})的特征值为 λ_n，特征函数为

$$\tilde{\varphi}(z,\lambda_n)=\varphi(x,\lambda_n)\alpha(x)^{1/4}/\alpha(0)^{1/4},\ n=0,1,\cdots;$$

则(A_{qiI})的特征值为 μ_m，特征函数为

$$\tilde{\psi}(z,\mu_m)=\psi(x,\mu_m)\cdot\beta(x)^{1/4}/\beta(0)^{1/4},\ m=0,1,\cdots.$$

又有$(\tilde{a},\tilde{\varphi}(\cdot,\lambda_n))_{L^2(0,l)}=\alpha(0)^{-1/4}(a,\varphi(\cdot,\lambda_n))_{L^2(0,1)}\neq 0$.

将 $\tilde{u},\tilde{v}$ 按特征函数展开，利用(3.6)，(3.7)可得 $\mu_n=\lambda_n, n=1,2,\cdots$，

$$\left(\frac{\beta(0)}{\beta(1)}\right)^{1/4}\tilde{\psi}(l,\mu_n)=\left(\frac{\alpha(0)}{\alpha(1)}\right)^{1/4}\tilde{\varphi}(l,\lambda_n)\quad n=1,2,\cdots.$$

因为

$$\tilde{\varphi}(l,\lambda_n)=(-1)^n+O\left(\frac{1}{n}\right)\quad n\to\infty,$$

$$\tilde{\psi}(l,\mu_n)=(-1)^n+O\left(\frac{1}{n}\right)\quad n\to\infty.$$

故有

$$\left(\frac{\beta(0)}{\beta(1)}\right)^{1/4}=\left(\frac{\alpha(0)}{\alpha(1)}\right)^{1/4},$$

$$\tilde{\psi}(l,\mu_n)=\tilde{\varphi}(l,\lambda_n)\quad n=1,2,\cdots.$$

注意

$$\lambda_0=\mu_0=0,$$

$$\psi(1,\mu_0)=\varphi(1,\lambda_0)=1,$$

便有

$$\mu_n=\lambda_n,\quad n=0,1,2,\cdots.$$

由[2]的定理 1 可得出

$$q(z)=p(z)\qquad(0\leqslant z\leqslant l),$$

$$i=h,$$

$$I=H.$$

注意到(△)及(△△)，由微分方程定解问题的解的唯一性，可得出

$$g(z)=f(z).$$

又

$$\frac{dz}{dx}=\frac{1}{f^2(z)}\quad z(0)=0,$$

$$\frac{dw}{dx}=\frac{1}{g^2(w)}\quad w(0)=0,$$

所以 $w(x)=z(x)$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$，故有 $\beta(x)=\frac{1}{w'^2(x)}=\frac{1}{z'^2(x)}=\alpha(x)$. 由 $\lambda_n=\mu_n, q(z)=p(z)$，可知 $\tilde{\varphi}=\tilde{\psi}, \tilde{\rho}_n=\tilde{\sigma}_n$. 由 $u(l,0)=v(l,0)$，得

$$\tilde{u}(l,0)\alpha(0)^{-1/4}=\tilde{v}(l,0)\beta(0)^{-1/4},$$

于是$(\tilde{a},\tilde{\varphi})\alpha(0)^{-1/4}=(\tilde{b},\tilde{\psi})\beta(0)^{-1/4}$,故 $\tilde{a}\alpha(0)^{-1/4}=\tilde{b}\beta(0)^{-1/4}$,即 $a(x)=b(x)$. 证毕.

参 考 文 献

[1] T. Suzuki, *Uniqueness and nonuniqueness in an inverse problem for the parabolic equation* (to appear in J. Diff. Eq).

[2] R. Murayama, *The Gel'fand—Levitan theory and certain inverse problems for the parabolic equation*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec IA. 23, 317—330(1981).

[3] 6M. 刘维登著,按二阶微分方程的特征函数的展开式(中译本).

An Inverse Problem for a Hyperbolic Equation

Wang Xiulan
(Dept. of Math., Harbin Teachers University)

Abstract

Let (E_{phHa}) denote the Hyperbolic Equation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+(p(x)-\frac{\partial^2}{\partial x^2})u=0 \quad (0<t<\infty 0<x<1),$$

with the boundary condition

$$\frac{\partial u}{\partial x}-hu|_{x=0}=0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}-Hu|_{x=1}=0 \quad (0<t<\infty)$$

and the intial condition

$$u|_{t=0}=a(x), \quad u_t|_{t=0}=0 \quad (0<x<1)$$

for given (p,h,H,a). Let $u=u(tx)$ be the solution of (E_{phHa}). We show the following results:

Theorem 1 *Let $u(tx)$ and $V(tx)$ be the solution of (E_{phHa}) and (E_{qiIb}). Then*

$$u(t,\xi)=V(t,\xi) \quad (0<t\infty,\xi=0,1)$$

holds if and only if (q,i,I) satisftes

$$q=p+2\frac{c}{dx}(G\cdot\Phi), \qquad i=h+(G\cdot\Phi)(0)$$

and $I=H-(G\cdot\Phi)(1)$. For the $G_{ohd\Phi}$, see present article.