第13卷第4期 1993年11月
数学研究与评论 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol. 13 No. 4 Nov. 1993

# 关于四元数矩阵之迹的几个定理*

张 树 青
(烟台师范学院数学系,264025)

## 一 引言与主要结果

R. Rellman[1] 对两个正定实矩阵建立了与 Cauchy－Schwarz 不等式相类似的结果,引起人们的关注[2-8],对 Rellman 不等式进行深入的研究. 但对四元数矩阵之迹的研究至今未见. 如所熟知,四元数体的非交换性,已经给四元数代数理论的研究带来了巨大的困难,它也必然影响到四元数矩阵迹的性质. 事实上,关于实(或复)矩阵的几个简单性质:

1) $\mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(BA)$;

2) 相似矩阵有相同的迹;

3) 一个矩阵的迹等于其全部特征根之和对一般的四元数矩阵显然均不成立,且后者中特征根的概念对非可中心化四元数矩阵是无意义的. 可见研究四元数矩阵之迹确有必要.

本文恒设 $\Omega$ 为四元数体,$R$ 为其中心(即实数域). 设 $\alpha=a_0+a_1i+a_2j+a_3k\in\Omega$,其中诸 $a_i\in R$,令 $\mathrm{Re}\ \alpha=a_0$,即 $\alpha$ 的实数部分,$\bar{\alpha}=a_0-a_1i-a_2j-a_3k$,称之为 $\alpha$ 的共轭四元数,称非负实数 $(\alpha\bar{\alpha})^{1/2}$ 为四元数 $\alpha$ 的范数,记作 $|\alpha|$. 我们用 $\Omega^{n\times n}$ 表示 $\Omega$ 上所有 $n$ 阶方阵的集合,对 $A=(a_{rs})\in\Omega^{n\times n}$,令 $\mathrm{tr}A=\sum\limits_{k=1}^{n}a_{kk}$,称为 $A$ 的迹,并令 $A^*=(\bar{a}_{sr})\in\Omega^{n\times n}$,称为 $A$ 的共轭转置矩阵. 用 $GL_n(\Omega)$ 记 $\Omega$ 上所有 $n$ 阶可逆矩阵的集合. 用 $SC_n(\Omega)$ 记 $\Omega$ 上所有 $n$ 阶自共轭矩阵(即 $A^*=A$)的集合. 我们还以 $A\geqslant0$ 表示 $A\in SC_n(\Omega)$ 且 $A$ 为半正定的,以 $A>0$ 表示 $A\in SC_n(\Omega)$ 且 $A$ 为正定的.

**定义** 设 $A\geqslant0,\lambda_1>\lambda_2>\cdots>\lambda_r(\geqslant0)$ 为 $A$ 的全部互异的特征根,$U$ 是使得下式成立的广义酉矩阵(即 $U^*=U^{-1}$)($U$ 的存在性及诸 $\lambda_i$ 的非负性可由文[10]而知):

$$A=U\ \mathrm{diag}(\lambda_1I_1,\lambda_2I_2,\cdots,\lambda_rI_r)U^*.$$

则对任意正数 $p$,定义 $A$ 的 $p$ 次幂为

$$A^p=U\ \mathrm{diag}(\lambda_1^pI_1,\lambda_2^pI_2,\cdots,\lambda_r^pI_r)U^*.$$

我们说上述定义与 $U$ 的选择无关,因此是具有确定意义的. 事实上,若广义酉矩 $U_1$ 也适合

$$A=U_1\ \mathrm{diag}(\lambda_1I_1,\lambda_2I_2,\cdots,\lambda_rI_r)U_1^*,$$

则 $\mathrm{diag}(\lambda_1I_1,\cdots\lambda_rI_r)U^*U_1=U^*U_1\mathrm{diag}(\lambda_1I_1,\cdots,\lambda_rI_r)$. 令

$$U^*U_1=\begin{bmatrix}T_{11}&T_{12}&\cdots&T_{1r}\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\ T_{r1}&T_{r2}&\cdots&T_{rr}\end{bmatrix}.$$

* 1991年5月28日收到.

则上式表明：$T_{st}\lambda_t=\lambda_s T_{st}$ $(s,t=1,2,\cdots,r)$. 由此易得 $T_{st}=0$ $(s\neq t)$. 从而 $\forall\ p>0$，有 $T_{st}\lambda_t^p=T_{st}\lambda_s^p$，$(s,t=1,2,\cdots,r)$. 因此有 $\mathrm{diag}(\lambda_1^p I_1,\cdots,\lambda_r^p I_r)U^*U_1=U^*U_1\mathrm{diag}(\lambda_1^p I_1,\cdots,\lambda_r^p I_r)$，即 $U\ \mathrm{diag}(\lambda_1^p I_1,\cdots,\lambda_r^p I_r)U^*=U_1\,\mathrm{diag}(\lambda_1^p I_1,\cdots,\lambda_r^p I_r)U_1^*$. 所以定义与 $U$ 的选择无关.

我们的主要结果如下：

**定理 1** 设 $A,B\in\Omega^{n\times n}$，则 $\mathrm{Re}[\mathrm{tr}(AB)]=\mathrm{Re}[\mathrm{tr}(BA)]$.

**推论 1** 设 $A,B\in\Omega^{n\times n}$，且 $A$ 相似于 $B$，则 $\mathrm{Re}(\mathrm{tr}A)=\mathrm{Re}(\mathrm{tr}B)$.

**推论 2** 设 $A_1,A_2,\cdots,A_m\in\Omega^{n\times n}$ $(m\geqslant 2)$，则 $\mathrm{Re}(\mathrm{tr}(A_1A_2\cdots A_m))=\mathrm{Re}(\mathrm{tr}(A_sA_{s+1}\cdots A_mA_1\cdots A_{s-1}))$ 对任意 $1\leqslant s\leqslant m$ 均成立.

**定理 2** 设 $A\in\Omega^{n\times n}$ 为可中心化矩阵，$R^*$ 是 $R$ 在 $\Omega$ 内的一个封闭的代数扩域. 则 $A$(在 $R^*$ 中)的非实数特征根必成对出现(即若 $\lambda\in R^*$ 是 $A$ 的特征根，则 $\bar\lambda$ 也是 $A$ 的特征根)，且 $\mathrm{Re}(\mathrm{tr}A)$ 恰好等于 $A$(在 $R^*$ 中)的全部特征根之和.

**定理 3**(Young 型不等式) 设 $A\geqslant 0,B\geqslant 0,p,q>0(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1)$，则

$$\mathrm{Re}(\mathrm{tr}(AB))\leqslant\frac{1}{p}\mathrm{tr}A^p+\frac{1}{q}\mathrm{tr}B^q.$$

**定理 4**(Hölder 型不等式) 设 $A_t\geqslant 0,B_t\geqslant 0,(t=1,2,\cdots,m),p,q>0(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1)$，则

$$\sum_{t=1}^m\mathrm{Re}(\mathrm{tr}(A_tB_t))\leqslant(\sum_{t=1}^m\mathrm{tr}A_t^p)^{1/p}(\sum_{t=1}^m\mathrm{tr}B_t^q)^{1/q}.$$

**定理 5**(Minkowski 型不等式) 设 $A_t\geqslant 0,B_t\geqslant 0$ $(t=1,2,\cdots,m),p>1$，则

$$(\sum_{t=1}^m\mathrm{tr}(A_t+B_t)^p)^{1/p}\leqslant(\sum_{t=1}^m\mathrm{tr}A_t^p)^{1/p}+(\sum_{t=1}^m\mathrm{tr}B_t^p)^{1/p}.$$

由于复数域是 $\Omega$ 的子域，故由定理 5 立得

**推论 3** 设 $A_t,B_t\,(t=1,2,\cdots,m)$ 为同阶半正定 Hermite 矩阵，$p>1$，则

$$(\sum_{t=1}^m\mathrm{tr}(A_t+B_t)^p)^{1/p}\leqslant(\sum_{t=1}^m\mathrm{tr}A_t^p)^{1/p}+(\sum_{t=1}^m\mathrm{tr}B_t^p)^{1/p}.$$

**定理 6**(Polya—Szegö 型不等式) 设 $A>0,B>0$，则

$$(\mathrm{tr}A^2)(\mathrm{tr}B^2)\leqslant\frac{1}{4}[(\frac{\lambda_1(A)\cdot\lambda_1(B)}{\lambda_n(A)\cdot\lambda_n(B)})^{1/2}+(\frac{\lambda_n(A)\cdot\lambda_n(B)}{\lambda_1(A)\cdot\lambda_1(B)})^{1/2}]^2[\mathrm{Re}(\mathrm{tr}AB)]^2,$$

其中记号 $\lambda_i(M)$ 表示 $M$ 的排好顺序的特征根：$\lambda_1(M)\geqslant\lambda_2(M)\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n(M)$.

**定理 7** 设 $A,B$ 为两个同阶的半正定(正定)Hermite 矩阵，则 $AB$ 的特征根均 $\geqslant 0(>0)$，$\mathrm{tr}AB$ 恰好等于 $A$ 的全部特征根之和，因而 $\mathrm{tr}AB\geqslant 0(>0)$.

由复数域是 $\Omega$ 的子域及定理 3、4、6、7 和 $A\geqslant 0(>0)$ 的性质立即得到

**推论 4** 设 $A\geqslant 0,B\geqslant 0$ 可换，或 $A,B$ 为两个同阶半正定 Hermite 矩阵，$p,q>0$ $(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1)$，则 $\mathrm{tr}(AB)\leqslant\frac{1}{p}\mathrm{tr}A^p+\frac{1}{q}\mathrm{tr}B^q$.

**推论 5** 设 $A_t\geqslant 0,B_t\geqslant 0$ 可换，或 $A_t,B_t$ 为同阶半正定 Hermite 矩阵，这里 $t=1,2,\cdots,m,p,q>0$ $(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1)$，则 $\sum_{t=1}^m\mathrm{tr}(A_tB_t)\leqslant(\sum_{t=1}^m\mathrm{tr}A_t^p)^{1/p}(\sum_{t=1}^m\mathrm{tr}B_t^q)^{1/q}$.

**推论 6** 设 $A>0,B>0$ 可换，或 $A,B$ 为 $n$ 阶正定 Hermite 矩阵，则

$$(\mathrm{tr}A^2)(\mathrm{tr}B^2) \leqslant \frac{1}{4}\Big[\Big(\frac{\lambda_1(A)\cdot\lambda_1(B)}{\lambda_n(A)\cdot\lambda_n(B)}\Big)^{1/2} + \Big(\frac{\lambda_n(A)\cdot\lambda_n(B)}{\lambda_1(A)\cdot\lambda_1(B)}\Big)^{1/2}\Big]^2(\mathrm{tr}AB)^2,$$

其中 $\lambda_i(M)$ 为 $M$ 的排好顺序的特征根：$\lambda_1(M)\geqslant\lambda_2(M)\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n(M)$，$M=A,B$.

因实数域是四元数体的中心，故文[8]的定理 1－4 分别为本文相应结果的特例.

## 二　定理的证明

为证本文的定理，需要如下引理：

**引理 1**[9]　设 $A\in\Omega^{n\times n}$ 是可中心化矩阵，$R^*$ 是 $R$ 在 $\Omega$ 内的一个封闭的代数扩张，则 $A$ 的弱特征多项式 $f(\lambda)$ 在 $R^*$ 中便恰有 $n$ 个根，称这 $n$ 个根为 $A$ 在 $R^*$ 中的特征根，当 $R^*$ 取定时，又简称为 $A$ 的特征根.

**引理 2**[9]　设 $A\in\Omega^{n\times n}$ 是可中心化矩阵，$R^*$ 是 $R$ 在 $\Omega$ 内的一个封闭的代数扩域，则 $A$ 在 $R^*$ 上有唯一确定的 Jordan 标准形式：

$$J=\begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_t \end{pmatrix},\quad 其中\ J_s=\begin{pmatrix} \lambda_s & & & \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda_s \end{pmatrix}\quad (s=1,2\cdots,t),$$

$J_s$ 是与特征根 $\lambda_s$ 对应的 Jordan 小块 $(s=1,2,\cdots,t)$.

**引理 3**[10]　设 $A\geqslant 0$，则存在广义酉矩阵 $U$，使 $U^*AU=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$，其中诸 $\lambda_i\geqslant 0$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 为 $A$ 的全部特征根.

**引理 4**[11]　设 $A\in SC_n(\Omega)$，则 $A$ 的迹等于 $A$ 的全部特征根之和.

**引理 5**[12]　设 $A\geqslant 0$，$B\geqslant 0$，则存在可逆矩阵 $P$，使 $P^*AP$ 与 $P^{-1}B(P^*)^{-1}$ 同时为实对角矩阵.

**引理 6**　设 $A\geqslant 0$，$B\geqslant 0$，则 $A+B\geqslant 0$.

下面证明本文的定理.

### 1.　定理 1 的证明

设 $A=(a_{st})$，$B=(b_{st})\in\Omega^{n\times n}$，则

$$\mathrm{tr}(AB)=\sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{n}a_{st}b_{ts}=\sum_{t=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}a_{st}b_{ts},\ \mathrm{tr}(BA)=\sum_{t=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}b_{ts}a_{st}.$$

又 $\forall\ a,b\in\Omega$，显然 $\mathrm{Re}(ab)=\mathrm{Re}(ba)$，$\mathrm{Re}(a+b)=\mathrm{Re}a+\mathrm{Re}b$，故有

$$\mathrm{Re}(\mathrm{tr}(AB))=\sum_{t=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\mathrm{Re}(a_{st}b_{ts})=\sum_{t=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\mathrm{Re}(b_{ts}a_{st})=\mathrm{Re}\Big(\sum_{t=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}b_{ts}a_{st}\Big)=\mathrm{Re}(\mathrm{tr}(BA)).$$

证毕.

推论 1、推论 2 均显然.

### 2.　定理 2 的证明

由引理 1 知，$A$ 在 $R^*$ 内恰有 $n$ 个特征根，又由 $A$ 是可中心化矩阵可设 $A$ 的弱特征多项式为 $f(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n$，诸 $a_i\in R$.

设 $\lambda_0\in\Omega$ 为 $A$ 在 $R^*$ 内的特征根，则

$$f(\lambda_0)=\lambda_0^n+a_1\lambda_0^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda_0+a_n=0.$$

从而

$$f(\bar\lambda_0)=\bar\lambda_0^n+a_1\bar\lambda_0^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\bar\lambda_0+a_n=\overline{\lambda_0^n}+\overline{a_1\lambda_0^{n-1}}+\cdots+\overline{a_{n-1}\lambda_0}+\overline{a_n}$$
$$=\overline{\lambda_0^n+a_1\lambda_0^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda_0+a_n}=\overline{f(\lambda_0)}=0,$$

其中 $a^i\,\overline{\lambda_0^{n-i}}=\overline{a_i\lambda_0^{n-i}}$ $(i=1,2,\cdots,n-1)$是显然的，故 $\bar\lambda_0$ 是 $f(\lambda)$的根，即是 $A$ 的特征根.

又由引理 2 可知

$$A\sim J=\begin{pmatrix}J_1&&&\\&J_2&&\\&&\ddots&\\&&&J_t\end{pmatrix},\quad 其中\ J_s=\begin{pmatrix}\lambda_s&&&\\1&\ddots&&\\&\ddots&\ddots&\\&&1&\lambda_s\end{pmatrix}\quad(s=1,2\cdots,t).$$

$J_s$ 是与特征根 $\lambda_s$ 对应的 Jordan 小块，而 $J$ 是 $A$ 在 $R^*$ 上的 Jordan 标准形式. 于是由推论 1 及 $A$ 的非实数特征根必成对出现便知 $\mathrm{Re}(\mathrm{tr}A)$恰好等于 $A$(在 $R^*$ 内)的全部特征根之和. 证毕.

### 3. 定理 3 的证明

设 $A\geqslant0,B\geqslant0,\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n(\geqslant0)$及 $\mu_1\geqslant\mu_2\geqslant\cdots\geqslant\mu_n(\geqslant0)$分别为 $A,B$ 的全部特征根，则由引理 3 知有广义酉矩阵 $U,V$ 使得

$$A=U\,\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)U^*,\ B=V\,\mathrm{diag}(\mu_1,\cdots,\mu_n)V^*,$$

于是有

$$AB=U[\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)W\,\mathrm{diag}(\mu_1,\cdots,\mu_n)W^*]U^*,\tag{1}$$

其中 $W=U^*V=(w_{st})_{n\times n}$显然仍为广义酉矩阵. 故由(1)及引理 1 有

$$\mathrm{Re}(\mathrm{tr}(AB))=\mathrm{Re}\{\mathrm{tr}[\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)W\,\mathrm{diag}(\mu_1,\cdots,\mu_n)W^*]\}$$
$$=\mathrm{Re}\{\mathrm{tr}[\sum_{t=1}^{n}E_{tt}\lambda_tW\,\mathrm{diag}(\mu_1,\cdots,\mu_n)W^*]\},\tag{2}$$

其中 $E_{tt}=\mathrm{diag}(0,\cdots,0,\underset{(第t个)}{1},0,\cdots0)$，$t=1,2,\cdots,n$. 直接计算可知

$$\mathrm{tr}[E_{tt}W\,\mathrm{diag}(\mu_1,\cdots,\mu_n)W^*]=\sum_{s=1}^{n}\mu_s|w_{ts}|^2\geqslant0.\tag{3}$$

由(2),(3)可得

$$\mathrm{Re}(\mathrm{tr}(AB))=\mathrm{Re}(\sum_{t=1}^{n}\lambda_t\sum_{s=1}^{n}\mu_s|w_{ts}|^2)=\sum_{t,s=1}^{n}\lambda_t\mu_s|w_{ts}|^2.\tag{4}$$

由经典的 Young 不等式：$\forall\ a,b\geqslant0,ab\leqslant\frac{1}{p}a^p+\frac{1}{q}b^q$，及广义酉矩阵的性质得

$$\mathrm{Re}(\mathrm{tr}AB)\leqslant\sum_{t,s=1}^{n}(\frac{1}{p}\lambda_t^p+\frac{1}{q}\mu_s^q)|w_{ts}|^2=\frac{1}{p}\sum_{t=1}^{n}\lambda_t^p+\frac{1}{q}\sum_{s=1}^{n}\mu_s^q.\tag{5}$$

由定义显然 $A^p\geqslant0,B^q\geqslant0$，且 $\lambda_1^p,\cdots,\lambda_n^p$ 与 $\mu_1^q,\cdots,\mu_n^q$ 分别为它们的全部特征根. 故由引理 4 与(5)便得 $\mathrm{Re}(\mathrm{tr}AB)\leqslant\frac{1}{p}\mathrm{tr}A^p+\frac{1}{q}\mathrm{tr}B^q$. 证毕.

### 4. 定理 4 的证明

如果 $\mathrm{tr}A_i$ 或 $\mathrm{tr}B_i$ $(i=1,2,\cdots,m)$全为 0，则定理 4 的结论自然成立. 否则，在定理 3 中取 $A\geqslant0,B\geqslant0$ 分别为

$$A=(\sum_{t=1}^{n}\mathrm{tr}A_t^p)^{-1/p}A_s\ (s=1,2,\cdots,m),\quad B=(\sum_{t=1}^{n}\mathrm{tr}B_t^q)^{-1/q}B_s\ (s=1,2,\cdots,m),$$

则

$$\frac{\mathrm{tr}A_sB_s}{(\sum_{t=1}^{n}\mathrm{tr}A_t^p)^{-1/p}(\sum_{t=1}^{n}\mathrm{tr}B_t^q)^{-1/q}}\leqslant\frac{1}{p}\frac{\mathrm{tr}A_s^p}{\sum_{t=1}^{n}\mathrm{tr}A_t^p}+\frac{1}{q}\frac{\mathrm{tr}B_s^q}{\sum_{t=1}^{n}\mathrm{tr}B_t^q}\tag{6}$$

在(6)中令取遍 $1,2,\cdots,m$，并相加即得所需结论. 证毕.

**5. 定理 5 的证明**

由题设及引理 6 知 $A_t+B_t\geqslant 0\ (t=1,2,\cdots,m)$，故 $(A_t+B_t)^p\geqslant 0\ (t=1,2,\cdots,m)$. 又对 $p>1$，有 $(A_t+B_t)^p=A_t(A_t+B_t)^{p-1}+B_t(A_t+B_t)^{p-1}$. 所以

$$\begin{aligned}\sum_{t=1}^{m}\mathrm{tr}(A_t+B_t)^p&=\sum_{t=1}^{m}\mathrm{Re}[\mathrm{tr}(A_t(A_t+B_t)^{p-1})]+\sum_{t=1}^{m}\mathrm{Re}[\mathrm{tr}(B_t(A_t+B_t)^{p-1})]\\&\leqslant(\sum_{t=1}^{m}\mathrm{tr}A_t^p)^{1/p}(\sum_{t=1}^{m}\mathrm{tr}(A_t+B_t)^{(p-1)q})^{1/q}\\&\quad+(\sum_{t=1}^{m}\mathrm{tr}B_t^p)^{1/p}(\sum_{t=1}^{m}\mathrm{tr}(A_t+B_t)^{(p-1)q})^{1/q}\qquad(\text{据定理 4})\\&=(\sum_{t=1}^{m}\mathrm{tr}A_t^p)^{1/p}(\sum_{t=1}^{m}\mathrm{tr}(A_t+B_t)^p)^{1/q}\\&\quad+(\sum_{t=1}^{m}\mathrm{tr}B_t^p)^{1/p}(\sum_{t=1}^{m}\mathrm{tr}(A_t+B_t)^p)^{1/q}\qquad(\text{因 }p=q(p-1)).\end{aligned}$$

两端同除以 $(\sum_{t=1}^{m}\mathrm{tr}(A_t+B_t)^p)^{1/p}$ 即得所需结论. 证毕.

**6. 定理 6 的证明**

令 $m=\lambda_n(B)/\lambda_1(A)$，$M=\lambda_1(B)/\lambda_n(A)$，易知 $m\leqslant\lambda_s(B)/\lambda_t(A)\leqslant M\ (s,t=1,2,\cdots,m)$，从而

$$\begin{aligned}&(m+M)\lambda_t(A)\lambda_s(B)-\lambda_s^2(B)-mM\lambda_t^2(A)\\&=(\lambda_s(B)/\lambda_t(A)-m)(M-\lambda_s(B)/\lambda_t(A))\lambda_t^2(A)\geqslant 0.\end{aligned}$$

将它应用到(4)得到

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(\mathrm{tr}(AB))\leqslant\sum_{t,s=1}^{m}\lambda_t(A)\lambda_s(B)|w_{ts}|^2&\geqslant\frac{1}{m+M}\sum_{t,s=1}^{m}(\lambda_s^2(B)+mM\lambda_t^2(A))|w_{ts}|^2\\&=\frac{1}{m+M}[\mathrm{tr}B^2+\frac{\lambda_1(B)\lambda_n(B)}{\lambda_1(A)\lambda_n(A)}\mathrm{tr}A^2],\end{aligned}\tag{7}$$

而且

$$\begin{aligned}&\mathrm{tr}B^2+\frac{\lambda_1(B)\lambda_n(B)}{\lambda_1(A)\lambda_n(A)}\mathrm{tr}A^2-2[\frac{\lambda_1(B)\lambda_n(B)}{\lambda_1(A)\lambda_n(A)}\mathrm{tr}A^2\mathrm{tr}B^2]^{1/2}\\&=[(\mathrm{tr}B^2)^{1/2}-(\frac{\lambda_1(B)\lambda_n(B)}{\lambda_1(A)\lambda_n(A)}\mathrm{tr}A^2)^{1/2}]^2\geqslant 0.\end{aligned}\tag{8}$$

由(7)，(8)，定理 6 得证.

**7. 定理 7 的证明.**

由引理 5 知，存在可逆矩阵 $P$ 使

$$P^*AP=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n),\quad P^{-1}B(P^*)^{-1}=\mathrm{diag}(\mu_1,\cdots,\mu_n).\tag{9}$$

由于 $P^*AP, P^{-1}B(P^*)^{-1}=P^{-1}B(P^{-1})^*$ 分别 $H$ 合同于 $A,B$，而 $A,B$ 为半正定（正定）的，故 $P^*AP, P^{-1}B(P^*)^{-1}$ 亦为半正定（正定的），因此，诸 $\lambda_i, \mu_i$ 均 $\geqslant 0$ $(>0)$. 故 $\lambda_i\mu_i \geqslant 0$ $(>0)$, $i=1,2,\cdots,n$.

又由(9)可得 $P^*AB(P^*)^{-1}=\mathrm{diag}(\lambda_1\mu_1,\cdots,\lambda_n\mu_n)$，其中 $\lambda_1\mu_1,\cdots,\lambda_n\mu_n$ 显然为 $AB$ 的全部特征根，它们均 $\geqslant 0$ $(>0)$.

最后由域上矩阵熟知的结果便知：$\mathrm{tr}AB$ 恰好等于 $\lambda_1\mu_1,+\cdots,+\lambda_n\mu_n$，因此，$\mathrm{tr}AB \geqslant 0$ $(>0)$. 证毕.

## 参 考 文 献


[1] R. Rellman, *General Inequalities* 2 (*Backeubach E. F. Ed*), Birkhäuser Verlag, 1980, 80—90.

[2] 冯慈璜，关于某些不等式的注记，杭州大学学报(自然科学版)，11(1984)，25—27.

[3] 冯慈璜，关于矩阵迹的不等式，杭州大学学报(自然科学版)，13(1986)，414—420.

[4] 钱吉林，关于 Bellman 不等式的注记，华中师范大学学报(自然科学版)，4(1986)，419—424.

[5] J. R. Magnus. , Linear Algebra and Its Applications, 95(1987), 127—134.

[6] 陈顺卿，关于 Bellman 猜想及有关不等式，河南大学学报(自然科学版)，2(1988)，17—22.

[7] 陈道琦，关于半正定 Hermite 矩阵乘积迹的一个不等式，数学学报，3(1988)，565—569.

[8] 陈顺卿等，正定矩阵的一点注记，数学季刊，4(1989)，91—96.

[9] 谢邦杰，体上矩阵的特征根与标准形式的应用，数学学报，4(1980)，522—533.

[10] 谢邦杰，四元数自共轭矩阵与行列式，吉林大学自然科学学报，2(1980)，19—35.

[11] 谢邦杰，四元数自共轭矩阵的行列式的展开定理及其应用，数学学报，5(1980)，668—683.

[12] 曹重光，四元数自共轭矩阵的几个定理，数学研究与评论，3(1988)，346—348.


# Several Theorems on the Traces of Quaternions Matrices


*Zhang Shuqing*

(Dept. of Math., Yantai Teachers College)


## Abstract


In this paper, we obtained a Young type inequality for the traces of quaternions matrices which easily leads to the Hölder type and Minkowski type inequalities on the same objects. We also got a Polya-Szegö type inequality.