第13卷第4期
1993年11月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION

Vol. 13 No. 4
Nov. 1993

Hamilton图的特定生成子图问题的反例*

孙建新
(绍兴师范专科学校数学系,浙江 312000)

摘要

文[1]定理3断言:一个Hamilton图G必存在仅有p条桥的相间偶圈,如果相间偶圈的边中有边在G的p个不连通初等子圈上($p\geqslant 2$). 本文的反例表明上述结论是错的,从而[1]中关于Peterson图不是Hamilton图的证明也不成立.

1. 引言

由[1]知,若G为Hamilton图,则必存在G的顶点度为$d_G(V_i)-2$ ($i=\overline{1,n}$)的特定生成子图Q,并且$C(\overline{Q})\stackrel{\triangle}{=}G-E(Q)=C_1\cup C_2\cup\cdots\cup C_q$是$G$的$q$个初等子圈;当$q=1$时$C(\overline{Q})$即为$G$的一个Hamilton圈,当$q\geqslant 2$时,这$q$个子圈是不连通的.

所谓Q与$C(\overline{Q})$之间的相间偶圈M是指它的边依次相间地分属于Q和$C(\overline{Q})$且有偶数条边的G的初等子圈.

当$q\geqslant 2$时,Q的边可分为两类:一类边的两个端点分属于不同子圈,这类边称为桥[1];另一类边的两个端点属于同一子圈,我们约定称之为弄(或巷:lane).

本文将证明[1]中如下命题有误:

命题(**文**[1]**定理**3) 设图G为Hamilton图,则图G中必有一个或二个以上无公共边的相间偶圈,且若相间偶圈有边在$C(\overline{Q})=G-E(Q)$的p个不连通子圈上,那么它与此p个子圈依次相关联的桥仅有p条.

2. 反例——七桥图

图1所示的图G是个Hamilton图,因为它存在着Hamilton圈$C=(V_1V_2V_3\cdots V_{14}V_1)$(本文采用符号参见[2]—[4]).

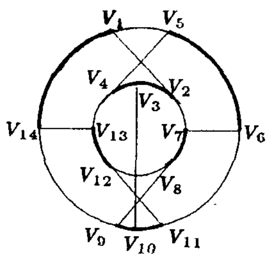

图1

易知,图G的一个特定生成子图为

* 1991年9月28日收到.

$$Q=\{(V_1V_2),(V_4V_5),(V_6V_7),(V_8V_9),(V_{11}V_{12}),(V_{13}V_{14}),(V_3V_{10})\},$$

而 $C(\bar{Q})=G-E(Q)=C_1\cup C_2$ 为 G 的两个不连通初等子圈：

$$C_1(V_1V_5V_6V_{11}V_{10}V_9V_{14}V_1),\quad C_2=(V_2V_3V_4V_{13}V_{12}V_8V_7V_2).$$

由定义可知，Q 的七条边均为连接 C_1 与 C_2 的桥(从而 Q 无弄)，我们约定称此图为七桥图.

如果将同一子圈上相邻顶点上的两条桥称为该子圈的一对邻桥(如 (V_1V_2) 和 (V_5V_4) 是 C_1 的一对邻桥)，那么这七桥图的特点是：C_1 的任何一对邻桥都不是 C_2 的邻桥；C_2 的任何一对邻桥也不是 C_1 的邻桥，因此 C_1 和 C_2 之间不存在仅含 2 条桥的相间偶圈.

可见，虽然七桥图 G 是 Hamilton 图，它的相间偶圈必然有边在它的仅有的两个子圈 C_1 和 C_2 上，但如上所述，七桥图却不存在仅含 2 条桥的相间偶圈，这说明[1]中定理 3 所谓"若相间偶圈有边在 $C(\bar{Q})$ 的 p 个子圈上，那么它与此 p 个子圈依次相关联的桥仅有 p 条"(这里 $p=2$)的结论不成立.

顺便指出，文[1]定理 3 的证明中下述疏忽是致错关键：即当已知 p 个子圈与相间偶圈有 $k(k>p)$ 条公共边时，就认为必有 $k-p$ 条公共边会集中到其中一个子圈上. 由反例可知，这种情况未必发生. 例如在七桥图中，$p=2,k=6$，相间偶圈 $M=(V_1V_2V_7V_6V_{11}V_{12}V_8V_9V_{14}V_{13}V_4V_5V_1)$ 共有 12 条边. M 与 $C(\bar{Q})$ 的公共边有 $k=6$ 条，其中 C_1 有 3 条：(V_1V_5)，(V_6V_{11}) 与 (V_9V_{14})，C_2 也有 3 条：(V_2V_7)，$(V_{12}V_8)$ 与 $(V_{13}V_4)$，并非有 $k-p=4$ 条边集中于同一子圈上！(图 2)

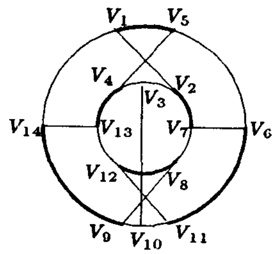

图 2

3. Peterson 图

Peterson 图确实不是 Hamilton 图(图 3)，但因[1]在证明中用到定理 3 的错误结论，故该证明无效. 事实上，七桥图与 Peterson 图同样有 2 个子圈($p=2$)，并且都不存在仅含 2 条桥的相间偶圈，但是一个是 Hamilton 图，另一个却不是.

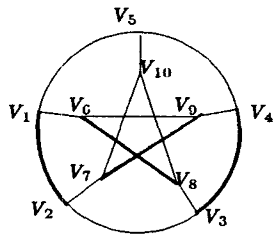

图 3

尽管七桥图不存在仅含 2 桥的相间偶圈，但作为一个 Hamilton 图，它必存在相间偶圈，只不过所含的桥将多于 2 条. 如图 2 所示的相间偶圈含 6 桥；此外，不难找到七桥图的仅含 4 桥的相间偶圈，例如 $(V_1V_2V_7V_6V_5V_4V_{13}V_{14}V_1)$.

另一方面，Peterson 图虽不是 Hamilton 图，但它的两个子圈 $(V_1V_2V_3V_4V_5V_1)$ 与 $(V_6V_8V_{10}V_7V_9V_6)$ 之间存在着含 4 桥的相间偶圈，如 $(V_1V_2V_7V_9V_4V_3V_8V_6V_1)$.

4. 结 论

1° 一个 Hamilton 图 G,在它的特定生成子图 Q 与 q 个不连通的初等子图 $C(\bar{Q}) \triangleq G-E(Q)=C_1 \cup C_2 \cup \cdots C_q$ 之间至少存在一个相间偶圈;且若 G 存在一个与 $C(\bar{Q})$ 中 p $(2 \leqslant p \leqslant q)$ 个有公共边的相间偶圈 M,那么 M 至少有 p 条桥;但 G 未必存在仅含 p 条桥的且与 p 个子圈有公共边的相间偶圈.

2° 一个非 Hamilton 图,在它的不连通子圈之间也可能存在相间偶圈.

3° 设图 G 的顶点在它的 p 个不连通子圈 $C_1, C_2, \cdots, C_p$ 上 $(p \geqslant 2)$,当 G 存在与 p 个子圈都有公共边且仅含 p 条桥的相间偶圈时,则 G 为一个 Hamilton 图.(证明不难得到,从略).

参 考 文 献

[1] 陈蝉, Hamilton 图及其特定生成子图的关系, 数学研究与评论, 1988, Vol. 8, No. 4, 531—534.

[2] C. L. Liu, *Elements of Discrete Mathematics*, 中译本, 刘振宏译, 人民邮电出版社, 116—126.

[3] R. Horsberg, 关于 Hamilton 回路的理论, 数学译林, 1980, 第 3 期, 80—86.

[4] A. Bondy, and R. Murty, *Graph Theory with Application*, The MacMillan Press LTD, 1976.

An Counterexample to the Proposition about Special Generating Subgraph of Hamiltonian Graph

Sun Jianxin

(Shaoxing Teachers College, Zhejiang)

Abstract

Theorem 3 in [1] states that any Hamiltonian graph must contain an alternate even-cycle connecting p subcycles with p bridges $(p \geq 2)$, here the p subcycles are elementary and disconnected one another. In this paper we give a counterexample to this proposition. In addition, we substitute some conclusions for it.