第13卷第4期　　数学研究与评论　　Vol. 13 No. 4
1993年11月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Nov. 1993

零级解析 Dirichlet 级数的增长性*

丁 晓 庆
(西北工业大学应用数学系，西安 710072)

摘 要

对于零(R)级解析函数(由在右半平面内收敛的 Dirichlet 级数定义)，本文提出了一种新的、更有适应性的增长指标，研究了该指标及其型的性质. 本文的结果改进了若干已有的结论[1,2].

1. 引 言

考虑 Dirichlet 级数

$$f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}a_ne^{-\lambda_n s}\quad(s=\sigma+it, 0<\lambda_n\uparrow\infty),\tag{1}$$

本文恒假定

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\log n}{\lambda_n}=0,\ \varlimsup_{n\to\infty}\frac{\log|a_n|}{\lambda_n}=0.\tag{2}$$

函数 $f(s)$ 在右半平面内定义、解析. 记

$$M(\sigma)=\sup_{-\infty<t<\infty}|f(\sigma+it)|,$$

$$m(\sigma)=\max_{n\geqslant1}|a_n|e^{-\lambda_n\sigma},\quad\sigma>0.$$

解析函数 $f(s)$ 的(R)级定义为[3]

$$\rho=\varlimsup_{\sigma\to0+0}\frac{\log^+\log^+M(\sigma)}{\log\frac{1}{\sigma}}.\tag{3}$$

当 $\rho=0$ 时，为了精确地描述解析函数 $f(s)$ 的增长性，[1 及其参考文献]、[2]和[4]等都曾引进过相应的增长指标.

本文将引进一种新的、更有适应性的增长指标 μ_M(见本文第 2 节)，研究该指标及其型的系数特征(与级数(1)的系数之间的关系).

利用本文的结果，可改进[1，定理 1($p\leqslant2$)]和[2，(6)与(8)式].

* 1991年6月11日收到. 1993年6月14日收到修改稿.

2. 指标 μ_M 及其系数特征

定理 1 假定级数(1)满足(2),由(3)定义的(R)级 $\rho=0$. 设

C_1: $$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\log n}{\log \lambda_n}<\infty. \tag{4}$$

C_2: 函数 $\rho(r)$ $(r\geqslant r_0, r_0\geqslant 1)$连续、严格单调减,函数 $U(r)=\rho(r)\log r$ $(r\geqslant r_0)$严格单调增,且

$$\lim_{r\to\infty}\rho(r)=0,\quad \lim_{r\to\infty}U(r)=\infty.$$

C_3: 存在正值函数 $h(r)$ $(r\geqslant r_0)$,使得

$$\lim_{r\to\infty}\frac{U\left(r+\frac{r}{h(r)}\right)}{U(r)}=1.$$

记

$$\mu_M=\overline{\lim_{\sigma\to 0+0}}\frac{\log^+\log^+ M(\sigma)}{U\left(\frac{1}{\sigma}\right)}, \tag{5}$$

$$\mu_m=\overline{\lim_{\sigma\to 0+0}}\frac{\log^+\log^+ m(\sigma)}{U\left(\frac{1}{\sigma}\right)}, \tag{6}$$

$$l=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\log^+\log^+|a_n|}{U(\lambda_n)}, \tag{7}$$

$$E_h=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log\log[r+rh(r)]}{U(r)}. \tag{8}$$

在上述条件和记号下,有 $l\leqslant\mu_m\leqslant\mu_M\leqslant\max\{l,E_h\}$.

证明 先证 $l\leqslant\mu_m$. 不妨设 μ_m 有限. 任取 $\varepsilon>0$. 由(6)知,对于所有充分小的 $\sigma>0$,必有

$$\log^+\log^+|a_n|e^{-\lambda_n\sigma}\leqslant\log^+\log^+ m(\sigma)\leqslant(\mu_m+\varepsilon)U\left(\frac{1}{\sigma}\right),\quad\forall\, n\geqslant 1.$$

对于充分大的 n,在上式中取 $\sigma=\lambda_n^{-1}$,我们容易推出: $l\leqslant\mu_m$.

下面只需证明: $\mu_M\leqslant\max\{l,E_h\}=L$. 不妨设 L 有限. 任取 $\varepsilon>0$. 由(7)知,必有正有限量 $A=A(\varepsilon)$,使得

$$|a_n|\leqslant A\exp\{\lambda_n^{(L+\varepsilon)\rho(\lambda_n)}\},\quad\forall\, n\geqslant 1. \tag{9}$$

以下总设 $\sigma>0$,且 σ 充分小. 令

$$\lambda(\sigma)=\sup\{\lambda:\lambda\geqslant r_0,\lambda^{(L+\varepsilon)\rho(\lambda)}\geqslant\lambda\sigma\}. \tag{10}$$

因 $\lim_{r\to\infty}\rho(r)=0$,故 $\lambda(\sigma)$ 有限. 由(9)、(10)知,

$$\begin{aligned} m(\sigma)&=\max\{\max_{\lambda_n\leqslant\lambda(\sigma)}|a_n|e^{-\lambda_n\sigma},\max_{\lambda_n>\lambda(\sigma)}|a_n|e^{-\lambda_n\sigma}\}\\ &\leqslant A\exp\{[\lambda(\sigma)]^{(L+\varepsilon)\rho[\lambda(\sigma)]}\}. \end{aligned} \tag{11}$$

令 $a=a(\sigma)=\dfrac{h\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{1+h\left(\frac{1}{\sigma}\right)}$, $b=b(\sigma)=1-a$,其中函数 $h(r)$ 由条件 C_3 决定. 易见,

$$M(\sigma)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|e^{-\lambda_n\sigma a}e^{-\lambda_n\sigma b}\leqslant m(\sigma a)\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\lambda_n\sigma b}. \tag{12}$$

由(4)容易推出，必存在正有限量 $B=B(\varepsilon)$ 使

$$\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\lambda_n\sigma b}\leqslant\left(\frac{1}{\sigma b}\right)^{B}. \tag{13}$$

联立(11)－(13)，得

$$M(\sigma)\leqslant A\exp\{[\lambda(\sigma a)]^{(L+\varepsilon)\rho[\lambda(\sigma a)]}+B\log\frac{1}{\sigma b}\}. \tag{14}$$

另外，根据条件 C_2，由(10)我们可依次推出下列各式：

$$[\lambda(\sigma)]^{(L+\varepsilon)\rho[\lambda(\sigma)]}=\sigma\lambda(\sigma),$$

$$\lambda(\sigma)\geqslant\frac{1}{\sigma},$$

且当 σ 充分接近于 0 时，

$$\lambda(\sigma)\leqslant\left(\frac{1}{\sigma}\right)^{\frac{1}{1-\varepsilon}},$$

$$[\lambda(\sigma a)]^{(L+\varepsilon)\rho[\lambda(\sigma a)]}\leqslant\left(\frac{1}{\sigma a}\right)^{\frac{L+\varepsilon}{1-\varepsilon}\rho(\frac{1}{\sigma a})}. \tag{15}$$

此外，由条件 C_3 易见，当 σ 充分接近于 0 时，必有

$$\frac{\log\log\frac{1}{\sigma b}}{\rho(\frac{1}{\sigma a})\log\frac{1}{\sigma a}}\leqslant\frac{L+\varepsilon}{1-\varepsilon},$$

$$\log\frac{1}{\sigma b}\leqslant\left(\frac{1}{\sigma a}\right)^{\frac{L+\varepsilon}{1-\varepsilon}\rho(\frac{1}{\sigma a})}. \tag{16}$$

由(14)－(16)可知，当 $\sigma\to 0+0$ 时，必有

$$\log^{+}\log^{+}M(\sigma)\leqslant O(1)+\frac{L+\varepsilon}{1-\varepsilon}U\left(\frac{1}{\sigma a}\right).$$

由此即知，$\mu_M\leqslant L=\max\{l,E_k\}$. 证完.

根据定理 1，我们可以改进[1，定理 1($p=2$)].

对于(R)级为无穷的解析函数，余家荣[5]曾引进(R－H)级. 对于(R)级为零的解析函数 $f(s)$，我们有一个十分类似的结果，这就是把定理 1 中的函数 $h(r)$ 取为函数 $U(r)$ 所得到的结果.

3. 指标 μ_M 的型及其型的系数特征

定理 2 假定级数(1)满足(2)，由(3)定义的(R)级 $\rho=0$. 又假定函数 $\rho(r)$ 和 $U(r)$ 满足定理 1 的条件 C_2，且由(5)定义的指标 $\mu_M\in(0,\infty)$. 记

$$V(r)=\exp\{\mu_M U(r)\},\quad r\geqslant r_0.$$

用 $W(r)$ 表示函数 $rV(r)$ 的反函数. 记

$$\tau_M = \overline{\lim_{\sigma\to 0+0}} \frac{\log^+ M(\sigma)}{V(\frac{1}{\sigma})}, \tag{17}$$

$$\tau_m = \underline{\lim_{\sigma\to 0+0}} \frac{\log^+ M(\sigma)}{V(\frac{1}{\sigma})},$$

$$L = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{W(\lambda_n)\log^+|a_n|}{\lambda_n},$$

$$E = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{W(\lambda_n)\log n}{\lambda_n}.$$

如果 $\lim\limits_{r\to\infty}\dfrac{V(cr)}{V(r)} = 1,\ \forall\, c \in (0,\infty)$，那么，$L \leqslant \tau_m \leqslant \tau_M \leqslant L + E$.

由(17)定义的量 τ_M 称为指标 μ_M 的型.

为证定理 2,先证

引理 假定级数(1)满足(2). 设函数 $\varphi(r)$ $(r\geqslant r_1, r_1\geqslant 0)$非负、连续、严格单调增、无界且

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\varphi(cr)}{\varphi(r)} = 1,\quad \forall\, c \in (0,\infty). \tag{18}$$

用 $\Phi(r)$表示函数 $r\varphi(r)$的反函数,记

$$T_M = \overline{\lim_{\sigma\to 0+0}} \frac{\log^+ M(\sigma)}{\varphi(\frac{1}{\sigma})}, \tag{19}$$

$$T_m = \underline{\lim_{\sigma\to 0+0}} \frac{\log^+ M(\sigma)}{\varphi(\frac{1}{\sigma})}, \tag{20}$$

$$L_0 = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\Phi(\lambda_n)\log^+|a_n|}{\lambda_n}, \tag{21}$$

$$E_0 = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\Phi(\lambda_n)\log n}{\lambda_n}. \tag{22}$$

在上述条件和记号下,必有

$$L_0 \leqslant T_m \leqslant T_M \leqslant L_0 + E_0.$$

证明 易见

$$\Phi(r)\varphi[\Phi(r)] = r,\quad r \geqslant r_1\varphi(r_1). \tag{23}$$

由此知,由(21)、(22)定义的量可表为

$$L_0 = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log^+|a_n|}{\varphi[\Phi(\lambda_n)]},\quad E_0 = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log n}{\varphi[\Phi(\lambda_n)]}. \tag{24}$$

先证 $L_0\leqslant T_m$. 不妨设 T_m 有限. 任取 $\varepsilon>0$. 由(20)知,对于所有充分小的 $\sigma>0$,必有

$$\log^+|a_n| \leqslant \log^+ m(\sigma) + \lambda_n\sigma \leqslant (T_m + \varepsilon)\varphi(\frac{1}{\sigma}) + \lambda_n\sigma,\ n \geqslant 1.$$

对于充分大的 n,在上式中取 $\sigma = \dfrac{\varepsilon}{\Phi(\lambda_n)}$,再利用(18)和(24),我们容易推出:$L_0\leqslant T_m$.

下面只需证明:$T_M\leqslant L_0+E_0\equiv L$. 不妨设 L 有限. 任取 $\varepsilon>0$,由(24)可知,必有有限量 $A=A(\varepsilon)$,使得

$$|a_n| \leqslant A\exp\{(L_0+\varepsilon)\varphi[\Phi(\lambda_n)]\},\quad \forall\, n\geqslant 1. \tag{25}$$

在这里及以下分析时，不妨认为 $\lambda_1 \geqslant r_1\varphi(r_1)$. 另外，以下总设 $\sigma>0$ 且 σ 充分小. 由(25)知，

$$M(\sigma) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| e^{-\lambda_n \sigma} \leqslant A \sum_{n=1}^{\infty} \exp\{(L+2\varepsilon)\varphi[\Phi(\lambda_n)] - \lambda_n \sigma\} \exp\{-(E_0+\varepsilon)\varphi[\Phi(\lambda_n)]\}. \tag{26}$$

因为 $\{\varphi[\Phi(\lambda_n)], n \geqslant 1\}$ 单调增且由(24)确定的 E_0 有限(因 $L_0+E_0 \equiv L<\infty$)，所以

$$\sum_{n=1}^{\infty} \exp\{-(E_0+\varepsilon)\varphi[\Phi(\lambda_n)]\} < \infty. \tag{27}$$

另外，由(23)和函数 $\varphi(r)$ 的单调性可知，对于所有的 n，必有

$$\varphi[\Phi(\lambda_n)] - \lambda_n \sigma = \varphi[\Phi(\lambda_n)](1 - \sigma\Phi(\lambda_n)) \leqslant \sup_{r_1 \leqslant r \leqslant \frac{1}{\sigma}} \varphi(r)(1-\sigma r) \leqslant \varphi(\frac{1}{\sigma}).$$

这样，

$$(L+2\varepsilon)\varphi[\Phi(\lambda_n)] - \lambda_n \sigma \leqslant (L+2\varepsilon)\varphi(\frac{L+2\varepsilon}{\sigma}). \tag{28}$$

联立(26)—(28)，我们有

$$\log^+ M(\sigma) \leqslant O(1) + (L+2\varepsilon)\varphi(\frac{L+2\varepsilon}{\sigma}), \quad \sigma \to 0+0.$$

由此即知：$T_M \leqslant L \equiv L_0 + E_0$. 证完.

显然，定理 2 由引理推出. 另外，由引理还可推出下述

命题 假定级数(1)满足(2). 设

1° 非负函数 $\psi(r)$ $(r \geqslant r_2, r_2 \geqslant 0)$ 在 $[r_2, \infty)$ 的任意有限闭区间上绝对连续. 记

$$\psi^*(r) = \begin{cases} \psi'(r) & \text{在 } r \text{ 处}, \psi'(r) \text{ 存在}, \\ 0 & \text{其他}, \end{cases} \qquad r \geqslant r_2.$$

2° 令 $V_1(r) = (\log r)^{\psi(r)}$，要求

$$\lim_{r\to\infty} V_1(r) = \infty, \quad \lim_{r\to\infty} \frac{\log V_1(r)}{\log r} = 0.$$

3° 令 $\Psi(r) = \psi(r) + \psi^*(r) r \log r \log r$，要求

$$\underline{\lim}_{r\to\infty} \Psi(r) > 0, \quad \overline{\lim}_{r\to\infty} \Psi(r) < \infty.$$

在上述条件下，必有

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log^+ |a_n|}{V_1(\lambda_n)} \equiv L_1 \leqslant \overline{\lim_{\sigma\to 0+0}} \frac{\log^+ m(\sigma)}{V_1(\frac{1}{\sigma})} \leqslant \overline{\lim_{\sigma\to 0+0}} \frac{\log^+ M(\sigma)}{V_1(\frac{1}{\sigma})} \leqslant L_1 + \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log n}{V_1(\lambda_n)}.$$

证明 由条件 3°知，必有正数 a、b 以及充分大 R_0，使

$$a < \Psi(y) < b, \quad r \geqslant R_0. \tag{29}$$

由条件 1°知，

$$\log V_1(R) - \log V_1(r) = \int_r^R \frac{\Psi(r)}{r \log r} dr, \quad R > r > R_0. \tag{30}$$

这样，由(29)、(30)及条件 2°可知：如果取

$$\varphi(r) = V_1(r), \quad r \geqslant R_0, \tag{31}$$

那么，函数 $\varphi(r)$ 满足引理的条件.

根据引理的结论和(24)，以下只需证明

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\varphi(r)}{\varphi[\Phi(r)]}=1. \tag{32}$$

事实上，由(23)和(31)可知，

$$\log\Phi(r)+\Psi[\Phi(r)]\log\log\Phi(r)=\log r,\quad r\geqslant R_0.$$

这样，由条件 2°可知，

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\log r}{\log\Phi(r)}=1.$$

再利用(29)及(30)得，

$$\log\varphi(r)-\log\varphi[\Phi(r)]=\int_{\Phi(r)}^{r}\frac{\Psi(r)}{r\log r}dr\to 0,\quad r\to\infty.$$

这说明(32)成立. 证完.

利用上述命题，我们可以改进[1，定理 1($p=1$)]以及[2，(6)和(8)式].

参 考 文 献

[1] A. Nautiyal and R. P. Doherey, Indian J. Pure Appl. Math., 13:12(1982), 1427—1432.

[2] 余家荣，中国科学 A，1(1983)，12—20.

[3] 余家荣，数学学报，21:2(1978)，97—118.

[4] 余久曼，数学研究与评论，3:1(1983)，37—40.

[5] Yu Jiarong, Chin. Ann. of Math., 3:4(1982), 545—554.

The Growth of Analytic Dirichlet Series of Order Zero

Ding Xiaoqing

(Dept. of Appl. M th., Northwestern Polytechnic l University, Xi' n)

Abstract

A new and more general growth index is introduced to the analytic function of (R) order zero, which is represented by Dirichlet series converging only in the right half-plane. Studied here are the properties of the index and the type with respect to it. What we obtained here improve some known results in [1,2].